Modelagem dos efeitos de retenção em processos de dispersão de espécies invasoras

Modeling of retention effects in dispersion processes of the invasive species

Simone Almeida Delphim Leal[1]
Augusto Cesar Noronha Rodrigues Galeão[2]
Luiz Bevilacqua[3]

RESUMO: Este artigo aborda um problema populacional dinâmico, com descrição de frente de ondas que representam a invasão da espécie estudada - o Tucunaré (Cichla Ocelaris). O estudo propõe um novo modelo para o processo de invasão, considerando que a espécie invasora mantém, temporariamente, uma fração da população total no território conquistado, a fim de estabelecer uma população autossustentável. Neste caso, a distribuição espacial desta espécie, não pode ser representada apenas pela Lei de Fick (difusão clássica), uma vez que há um fenômeno novo envolvido no processo, que não pode ser caracterizado apenas pela manipulação dos parâmetros de difusividade. Assim, avaliamos um novo modelo, que inclui explicitamente os processos de retenção temporária através da inclusão de um termo de quarta ordem. O problema populacional dinâmico considerado, descreve a propagação de frente de ondas que representam a invasão da espécie estudada e ele é modelado, isto é, matematicamente por equações de transporte que são resolvidas numericamente, com aplicação de métodos de elementos finitos.
Palavra-chave: Matemática Aplicada, Invasão biológica, Modelo do Processo de Invasão.

ABSTRACT: This article addresses a dynamic population problem, with a description of the front of waves that represent the invasion of the studied species – Tucunaré (Cichla Ocelaris). The study proposes a new model for the invasion process, whereas the invasive species maintains, temporarily, a fraction of the total population in the conquered territory; in order establish a self-sustaining population. In this case, the spatial distribution of this species, cannot be represented only by Fick's Law (classical diffusion), since there's a new phenomenon involved in the process, that cannot be characterized merely by manipulating the parameters of diffusivity. Thus, we evaluate a new model, which explicitly includes the temporary retention processes through of inclusion of a fourth-order term. The dynamic population problem considered, it describes the wave's front propagating that represent the invasion of the studied species, and it is modeled, i.e., mathematically by transport equations that are resolved numerically, with the application of finite element methods.
Keyword: Applied Mathematics, Biological Invasion, Model of the Invasion Process.

[1] Doutora em Modelagem Computacional pelo Laboratório Nacional de Computação Científica, professora adjunta da Universidade Federal do Amapá, Departamento de Pós-Graduação e Pesquisa, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional e pesquisadora do Grupo de Pesquisa em Matemática Aplicada, E-mail: leal@unifap.br.

[2] Doutor em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal do Rio de Janeiro, pesquisador do Laboratório Nacional de Computação Científica, Departamento de Mecânica Computacional e professor permanente da Universidade Federal do Bahia, Doutorado Multiinstitucional e Multidisciplinar em Difusão do Conhecimento, E-mail: acng@lncc.br.

[3] Doutor em Mecânica Teórica e Aplicada pela Stanford University, professor emérito da Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa em Engenharia e pesquisador do Grupo Modelagem, Análise e Simulação Computacional em Ciências Aplicadas, E-mail: bevilacqua@coc.ufrj.br.

1. INTRODUÇÃO

A água e terra serviram de barreiras para isolar a biota mundial em diferentes compartimentos na história da humanidade. Com o aumento da mobilidade humana e do comércio mundial, muitas destas barreiras caíram e espécies são frequentemente transportadas para novos habitats em aviões, vasos de plantas, objetos pessoais como roupas e sapatos, ou ainda, na água de lastro utilizada pelos navios para compensar perdas de peso no descarregamento e evitar o estresse das estruturas.

Existem além destas, muitas outras formas de introdução de espécies. Algumas introduções ocorrem acidentalmente como nas situações em que o transporte de espécies é feito de forma involuntária pelo homem, outras ocorrem de forma intencional, motivadas por atividades econômicas.

A grande maioria das espécies introduzidas tem dificuldade em se adaptar ao novo ambiente e acabam morrendo, ou sobrevivendo durante algum tempo de forma precária, outras conseguem se adaptar e sobreviver no novo ambiente, mas não conseguem encontrar formas de se reproduzirem. Todavia, algumas espécies conseguem ultrapassar estas barreiras e ainda encontrar meios de se reproduzirem, gerando descendentes férteis que passam a se dispersar e colonizar o novo ambiente, dominando as espécies nativas (ZILLER, 2001).

Espécies que atingem esse status passam a ser consideradas espécies exóticas invasoras (ELTON, 1958) e sua dispersão, conhecida como invasão biológica, é um processo que precisa ser evitado e controlado em prol da conservação da biodiversidade e da manutenção dos recursos naturais em quantidade e com qualidade insuficientes para manutenção da vida humana e de todas as outras espécies.

Em função dos impactos ambientais causados, as espécies invasoras foram consideradas pela Organização das Nações Unidas (ONU) como a segunda causa mundial para a perda de biodiversidade atrás apenas da destruição do ambiente natural. Tal impacto ambiental, que inclui o risco à diversidade genética, riqueza local de espécies e diversidade de habitat, torna as espécies exóticas agentes de mudança global (PIMENTEL; LACH; ZUNIGA et al., 2001; MACK; SIMBERLOFF; LONSDALE et al., 2000; VITOUSEK; ANTONIO; LOOPE et al, 1996).

Buscando solucionar esses problemas, a ONU e outros órgãos internacionais criaram, em 1997, o Programa Global de Espécies Invasoras (GISP). Posteriormente, o Ministério do Meio Ambiente Brasileiro (MMA) e a Empresa Brasileira de Pesquisas Agropecuária (EMBRAPA) promoveram reuniões com representantes de toda América Latina visando a troca de informações e incentivando pesquisas sobre o assunto.

Desde então muitas ações têm sido tomadas neste sentido, como a criação da lista, com as cem piores espécies invasoras do mundo, elaborada pela União Mundial de Conservação (IUCN) objetivando alertar os países para os riscos da possível introdução de algumas dessas espécies (OLIVEIRA, 2007). Juntam-se, a estas iniciativas, pesquisas que buscam identificar características comuns às espécies invasoras que podem ajudar a antecipar os problemas causados por estas e definir medidas de controle e restrição.

Uma invasão bem sucedida depende do êxito em cada uma das fases da invasão. Por isso, todas as fases da invasão têm sido objeto de investigações teóricas. Neste contexto, modelos usados na compreensão da expansão espacial de espécies invasoras podem ter grandes implicações práticas no que diz respeito a questões como: a forma pela qual a dispersão ou o sistema reprodutivo afeta a expansão; a mensuração dos possíveis impactos econômicos de uma espécie invasora; o potencial de expansão de uma invasão ao longo do tempo.

Problemas relacionados à dispersão de espécies biológicas vêm recebendo muita atenção nos últimos 20 anos (DRAKE; MOONEY; DICASTRI et al., 1989; HENGEVELD, 1989; MOONEY; DRAKE, 1986) provavelmente porque muitos ecossistemas têm sido invadidos por organismos exóticos com consequências potencialmente drásticas para a fauna e flora nativas. Visando compreender, controlar e até prevenir o processo de dispersões espaciais, surgiram diversos modelos matemáticos cujos principais focos são a investigação da forma e da taxa de dispersão da população em um ambiente. Inicialmente, nos modelos contínuos em ecologia matemática, a variação temporal da densidade populacional era obtida considerando o balanço entre nascimentos, mortes, migração e interações entre outras espécies. Um exemplo deste tipo de modelagem em que o ambiente é considerado homogêneo é o modelo de Lotka-Volterra no qual a variação temporal ou taxa de crescimento populacional é expressa em termos de equações diferenciais ordinárias (EDO's) (EDELSTEIN-KESHET, 1986). Em observações de situações reais, entretanto, percebe-se que o ambiente raramente é homogêneo, como em casos de experimentos em laboratórios.

Mais recentemente, parte da literatura sobre modelos ecológicos na área de dispersão populacional é baseada em modelos determinísticos expressos em termos de equações diferenciais parciais (EDP's) que consideram que o ambiente pode ser heterogêneo possuindo locais favoráveis e hostis para a sobrevivência de uma espécie. Tais modelos permitem considerar também situações nas quais o ambiente é homogêneo, mas a distribuição inicial da população é não homogênea. Como exemplo, têm-se os casos em que os indivíduos tendem a se dispersar de regiões com alta densidade para áreas não ocupadas produzindo uma frente de invasão.

Nas primeiras aplicações de modelos de EDP na ecologia populacional, assumiu-se que o organismo tem movimento Browniano aleatório e que a taxa de dispersão é independente do tempo e do espaço. Esta hipótese conduz ao modelo de difusão (EDELSTEIN-KESHET, 1986; OKUBO; LEVIN, 2001). Embora simples, o modelo de difusão tem sido usado para descrever o movimento de uma variedade de animais, sendo em geral mais preciso quando o ambiente é homogêneo (DOBZHANSKY; WRIGHT, 1943; KAREIVA, 1982).

Um dos primeiros modelos matemáticos usados formalmente para descrever a dispersão populacional de uma espécie foi desenvolvido por Skellam (1951), utilizando equações de difusão-reação para modelar a expansão da população de ratos silvestres na Europa. O modelo de Skellam considera um movimento por difusão e o crescimento Malthusiano, e prediz que a área ocupada por um invasor aumenta linearmente com o tempo (OKUBO; LEVIN, 2001). Este modelo foi bem sucedido em descrever a faixa de expansão histórica do estorninho (Sturnus vulgaris), do pombo inglês (Passer domesticus), entre outros (OKUBO; LEVIN, 2001).

Modelos de dispersão a partir de equação de difusão-reação se tornam mais complexos quando o crescimento populacional é dependente da densidade como ocorre no modelo clássico de Fisher (FISHER, 1937), que representa uma dispersão por difusão aleatória incluindo um crescimento populacional logístico (SKELLAM, 1951). O modelo de Fisher (FISHER, 1937) tem sido usado para fazer predições da faixa de expansão usando dados em microescala de movimentos individuais para uma variedade de animais, representando particularmente bem a dispersão de algumas espécies como borboletas, ratos silvestres, entre outros (ANDOW; KAREIVA; LEVIN, 1990; OKUBO; MAINI; WILLIAMSON, 1989).

Considerando o grande número de modelos para invasão biológica que consideram para representar a difusão apenas o fluxo fickiano em que o deslocamento ocorre dos locais com maior para menor concentração, mas observa-se que este tipo de modelagem pode superestimar a velocidade da frente de invasão de uma espécie em que uma parcela dos indivíduos fica retida temporariamente durante o processo de invasão.

Uma alternativa para a modelagem da difusão considerando uma retenção temporária foi proposta por Bevilacqua, Galeão e Costa (2011a) através da estruturação de novas leis constitutivas partindo de modelos discretos e generalizados, posteriormente, para o caso contínuo.

Neste trabalho apresenta-se um modelo do processo de invasão, considerando que a espécie invasora mantém temporariamente uma fração da população total no território conquistado, além de estabelecer uma população autossustentável. Neste caso, a equação de difusão clássica, não representa satisfatoriamente o problema colocado, uma vez que há um fenômeno novo envolvido no processo que não pode ser caracterizado simplesmente manipulando os parâmetros de difusividade. Assim, avalia-se um novo modelo que inclui explicitamente os processos de retenção temporária através da inclusão de um termo de quarta ordem.

2. METODOLOGIA

Com o objetivo de desenvolver um modelo matemático para descrever a frente de invasão de uma única espécie, considerando uma situação em que a equação de difusão clássica não representa satisfatoriamente o problema proposto, visto há um fenômeno envolvido no processo que não pode ser caracterizado simplesmente manipulando os parâmetros de difusividade, realizamos uma pesquisa bibliográfica, da qual ressaltamos o trabalho desenvolvido por Bevilacqua, Galeão e Costa (2011b).

Após a seleção prévia pelo modelo de base, foram inseridos os termos de alta ordem ao modelo de difusão clássico, gerando o modelo a ser analisado neste trabalho. Em seguida, é apresentada a análise do modelo proposto através de simulações que nos permitem avaliar a sensibilidade em relação aos parâmetros. Para a obtenção das simulações representadas pelos gráficos, o modelo matemático foi resolvido numericamente usando o método de elementos finitos.

3. RESULTADO E DISCUSSÃO

3.1. Modelagem Matemática

A dispersão espacial de uma espécie em um domínio genérico (Ω) pode ser considerada basicamente como um processo em que os indivíduos se espalham enquanto se reproduzem. Este processo pode ser modelado através dos modelos do tipo difusão-reação em que o termo de reação representa a dinâmica vital da espécie (nascimento e morte),

$$\frac{\partial u}{\partial t} = div(k_2 \nabla(U)) + U\sigma \quad x \in \Omega \subset \Re^d, d \in \{1,2,3\} \quad t \geq 0$$

onde U = U (x, t) é a densidade populacional, t é o tempo, x é a coordenada espacial, k2 é o coeficiente de dispersão populacional de forma que o termo associado ao gradiente (∇(U)) representa a difusão/dispersão e o termo associado a função de crescimento σ corresponde ao termo de reação.

A modelagem da dispersão sem dinâmica vital é considerada adequada em diversas situações como quando a escala temporal usada não compreende a duração do ciclo de vida da espécie ou o balanço entre natalidade, mortalidade e migração se anula. Neste caso, a modelagem matemática pode ser feita através da equação:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = div(k_2 \nabla(U))$$

Durante a dispersão de uma espécie, diversas são as situações que podem levar a uma interrupção temporária do processo de espalhamento da espécie. Em especial pode-se citar as observações de Darwin (1872): “Em muitos casos, um grande estoque de indivíduos de uma mesma espécie é absolutamente necessário para sua preservação”.

Esta relação torna-se evidente à medida que os efeitos benéficos do número de indivíduos presentes em uma população representam um princípio biológico fundamental presente em espécies cuja sobrevivência dos jovens é mantida pela presença dos adultos ou estratégias de sobrevivências como a caça requerem um número crítico de indivíduos para ser energeticamente eficiente.

Como um exemplo ilustrativo, podemos considerar um importante recurso pesqueiro natural da Amazônia, o Tucunaré (Cichla ocelaris) que é introduzido em barragens e açudes para criação de peixes devido a sua carne excelente para alimentação e suas características próprias para pesca esportiva. Entretanto, é predador de espécies nativas, que causa sérios danos à ictiofauna local.

O conhecimento da existência de cuidado parental como característica da espécie pode interferir na busca por informações que facilitem a previsão da amplitude da invasão, acelerando a frente de invasão, além da realidade. Assim, quando a reprodução ocorre durante a invasão, no caso da espécie apresentar cuidado parental, parte dos indivíduos (os envolvidos na reprodução) ficam retidos temporariamente numa dada região.

Fenômenos como este não são bem representados pela clássica equação de difusão porque a retenção temporária não pode ser representada pela simples manipulação do coeficiente de difusão k2, sendo necessária a inclusão de termos de alta ordem, mais especificamente de um termo de quarta ordem (BEVILACQUA; GALEÃO; COSTA, 2011b).

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \beta k_2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - k_4 \beta (1-\beta) \frac{\partial^4 U}{\partial x^4}$$

Onde o coeficiente k4 é o coeficiente de retenção.

Na equação em que o termo negativo de quarta ordem introduz a retenção, particular atenção deve ser dada ao parâmetro $0 \leq \beta \leq 1$. Note que quando $\beta = 1$, a equação se reduz a equação acima que representa a difusão clássica, e quando $\beta = 0$ tem-se o caso estacionário, (U = constante) resultados consistentes com as hipóteses empregadas na definição do modelo.

Dado que o foco predominante deste artigo é investigar os efeitos da retenção em processos de invasão biológica em um domínio espacial, restringe-se, por simplicidade, a problemas definidos em um domínio unidimensional ($\Omega = R$), cujos coeficientes de difusão e retenção, respectivamente k2 e k4, independem de $x \in \Omega$. Mais ainda, não se considera a dependência do parâmetro β com ki, i = 1, 2, o que efetivamente ocorre em problemas conjugados de difusão-retenção como mostrados em Bevilacqua, Galeão e Costa (2011b; 2011a).

Além disso, como explicado anteriormente, nesta seção, não serão abordados aspectos relacionados com a variação da densidade populacional em função de processos locais (tais como: mortes nascimentos e predação), focando apenas na redistribuição populacional devida a difusão-retenção.

3.2. Modelo Populacional de Difusão com Retenção

Em se tratando de populações, a difusão refere-se ao fenômeno no qual um grupo de indivíduos, inicialmente concentrados em uma região do espaço, espalham-se durante um tempo, ocupando gradualmente uma área maior em torno desta região, enquanto que a retenção, em contra partida refere-se à parcela da população que permanece retida temporariamente nesta região. Note que neste contexto não se está considerando a existência de retenção permanente a qual seria equivalente à introdução de um sumidouro.

Em conformidade com observações anteriores, matematicamente, o problema proposto consiste em:

Determinar a densidade populacional U = U (x, t), x ∈ Ω = (0, L) que satisfaz à equação diferencial,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(k_2\beta\frac{\partial u}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial x}(k_4\beta(1-\beta)\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}) em \Omega \times (0,t)$$

3.2.1. Condições de contorno e iniciais

A solução deste problema pressupõe a definição das condições de contorno e da condição inicial. A condição inicial e facilmente identificada, e representa a distribuição inicial (em t = 0) dos indivíduos da espécie em questão, representada pela densidade populacional, U (x, 0). Espacialmente, esta equação envolve derivadas de 2ª ordem e 4ª ordem, requerendo para o seu fechamento, a prescrição de valores em suas extremidades, envolvendo combinações do valor da função U (0, t); primeira derivada; segunda derivada e terceira derivada (respectivamente ∂U/∂x(0, t); ∂2U/∂x2(0, t) e; ∂3U/∂x3(0, t).

Para o problema específico de dinâmica populacional num contexto de invasões biológicas nos restringiremos a dois tipos mais apropriados a esta classe de problemas, isto é:

• Densidade populacional constante na fronteira: refere-se ao caso em que uma dada densidade populacional é fixada na fronteira Γ, isto é:

$$U(x,t) = U_0, x \in \Gamma, t \in I$$

Quando U0 = 0, está se assumindo que a população está distribuída a uma distância suficientemente grande da fronteira de forma que nenhum indivíduo possa atingi-la dentro do intervalo de tempo I ou que a fronteira atua como uma região hostil que impede a sobrevivência de qualquer indivíduo.

• Fluxo nulo através da fronteira: refere-se aos casos em que existem barreiras físicas como, por exemplo, rios, montanhas e cercas, que impedem a passagem de indivíduos através da fronteira Γ, isto é:

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,t) = 0, x \in \Gamma, t \in I$$

Assim, define-se o problema modelo unidimensional da seguinte forma:

Problema (P1): Determinar U(x,t) que satisfaz:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k_2\beta\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - k_4\beta(1-\beta)\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} em \Omega \times (0,t)$$

tal que,

$$\begin{cases} U(0,t) = U_{0,} t \in I; \\ U(L,t) = U_L, t \in I; \\ \dfrac{\partial U}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial U}{\partial x}(L,t) = 0, t \in I; \\ U(x,0) = U_0(x), x \in \Omega \end{cases}$$

onde k2 é o coeficiente de difusão que é uma medida do quão rápido o organismo se dispersa; k4 é o coeficiente de retenção.

3.2.2. Simulações Numéricas

Com o objetivo de caracterizar o efeito da retenção para diferentes valores de β, a partir do modelo descrito pelo problema (P1), apresentam-se alguns resultados numéricos do modelo de elementos finitos propostos em Bevilacqua, Galeão e Costa (2011a). Para tanto, considera-se o problema (P2) descrito com a condição inicial representada pela Figura 1.

Problema (P2): Determinar U(x, t) que satisfaz:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t}(x,t) = C_2 \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,t) - C_4 \dfrac{\partial^4 U}{\partial x^4}(x,t) \\ U(0,t) = U(1,t) = 1 \\ \dfrac{\partial U}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial U}{\partial x}(1,t) = 0 \end{cases};$$

em que C2 = K2 ∗ β e C4 = K4 ∗ β(1 − β).

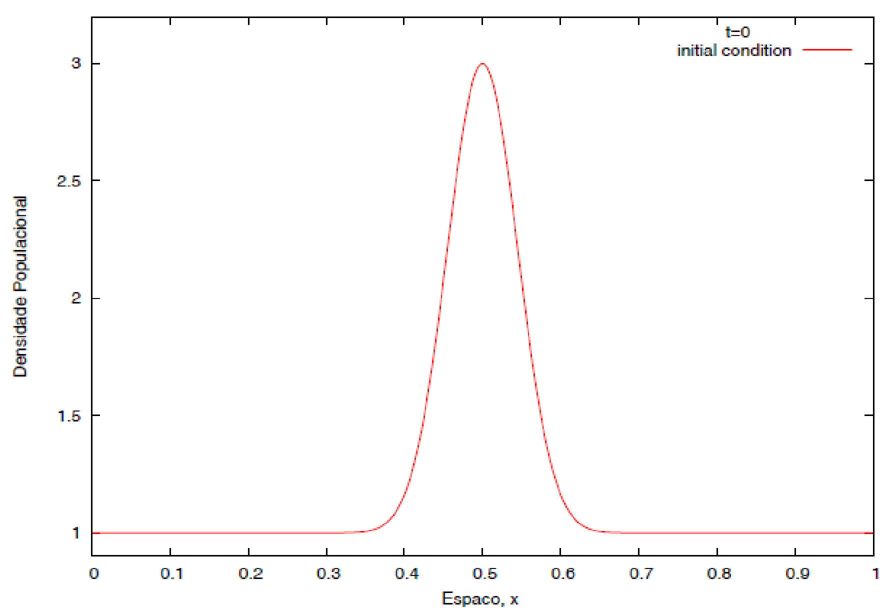

Figura 1. Condição Inicial.
Fonte: Gráfico elaborado pelos autores.

Neste caso, a existência ou não da retenção foi estabelecida através da variação do parâmetro β. Isto é, no Problema (P2) quando β = 1.0 tem-se o caso puramente difusivo. Por outro lado, quando β ≠ 1, o termo de quarta ordem é ativado representando um processo acoplado de difusão e retenção controlado respectivamente pelos coeficientes k2 e k4.

Durante todo o trabalho, adota-se k4 = (k2)2 = 10−6, o que caracteriza a diferença de escala sugerida na descrição dos parâmetros em Bevilacqua et al. (2011b). O parâmetro β = 0.5 foi escolhido por representar uma intensidade média de retenção conforme pode ser observado na Figura 2.

Nas Figuras 2, 3 e 4 comparam-se as soluções com β = 1.0 (difusão pura) e β = 0.5 (difusão com retenção) para três instantes de tempo. Desses resultados fica comprovada a redução da velocidade de difusão devida a inclusão do termo de quarta ordem associado a retenção.

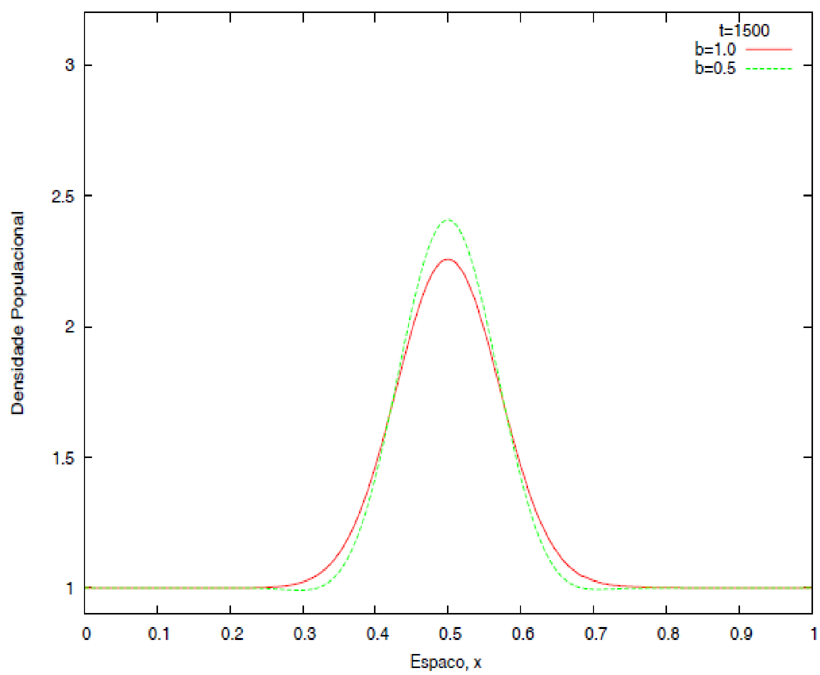

Figura 2. Comparação entre as soluções com β = 1.0 (difusão pura) e β = 0.5 (difusão com retenção).
Fonte: Gráfico elaborado pelos autores.

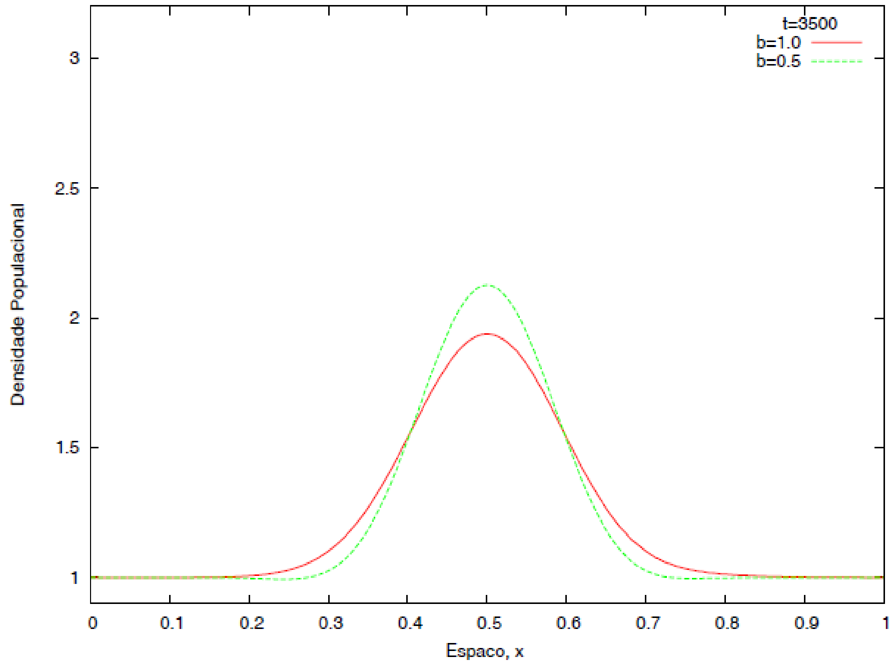

Figura 3: Comparação entre as soluções com β = 1.0 (difusão pura) e β = 0.5 (difusão com retenção). Fonte: Gráfico elaborado pelos autores.

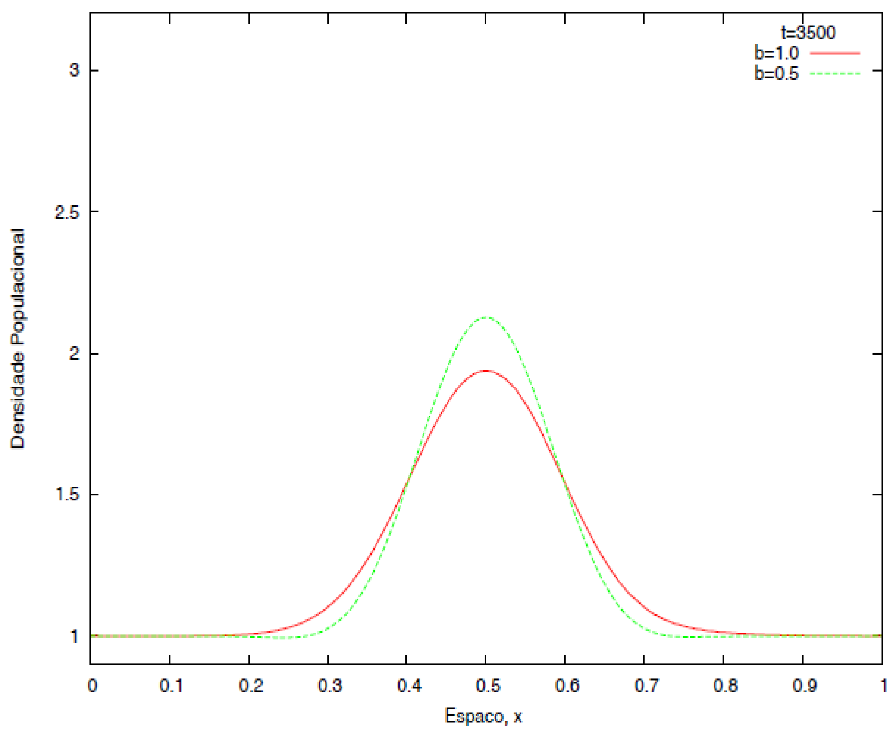

Figura 4: Comparação entre as soluções com β = 1.0 (difusão pura) e β = 0.5 (difusão com retenção). Fonte: Gráfico elaborado pelos autores.

O experimento seguinte tem por objetivo avaliar à sensibilidade do modelo numérico a variação de $0 < \beta \leq 1$ conforme apresentado na Figura 6.

3.2.3. Influência do parâmetro β

A Figura 6 apresenta uma tabela relacional entre os parâmetros associados aos coeficientes de difusão e de retenção. Observa-se que a terceira coluna indica o percentual de retenção referente à difusão.

As figuras 7 e 8 apresentam a evolução temporal do experimento, o que nos permite comparar os resultados para diferentes valores de β conforme legenda na imagem.

Ao contrário do que foi feito no experimento anterior, neste caso, optou-se por uma escala variável no eixo y, visando facilitar a sua visualização.

A figura 5 exibe o comportamento dos parâmetros β e $\beta(1-\beta)$. Note que apesar do comportamento logístico, cujo valor máximo 0.25 ocorre quando $\beta = 0.5$, o efeito da retenção mais forte não corresponde a este valor β. A explicação para este fato encontra-se na figura 6, que apresenta uma tabela relacional entre os parâmetros associados a retenção e a difusão.

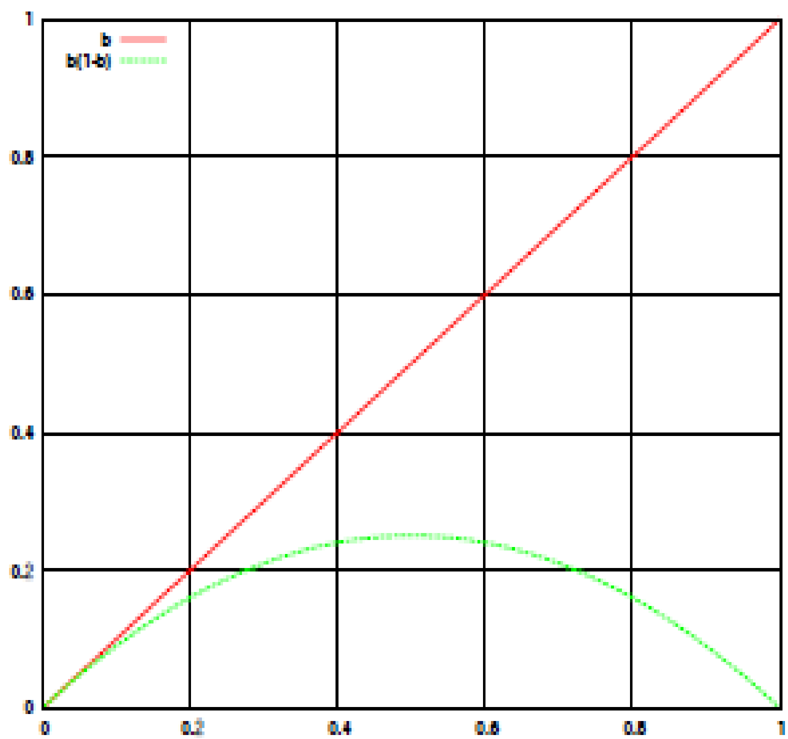

Figura 5: Comportamento dos parâmetros $\beta \times \beta(1-\beta)$.
Fonte: Gráfico elaborado pelos autores.

Relação entre coeficientes		
β	$\beta(1-\beta)$	%
0.25	0.1875	75%
0.35	0.2275	65%
0.50	0.2500	50%
0.75	0.1875	25%
0.80	0.1600	20%
0.90	0.0900	10%
1.00	0.0000	0%

Figura 6: Relação entre parâmetros de difusão e retenção.
Fonte: Gráfico elaborado pelos autores.

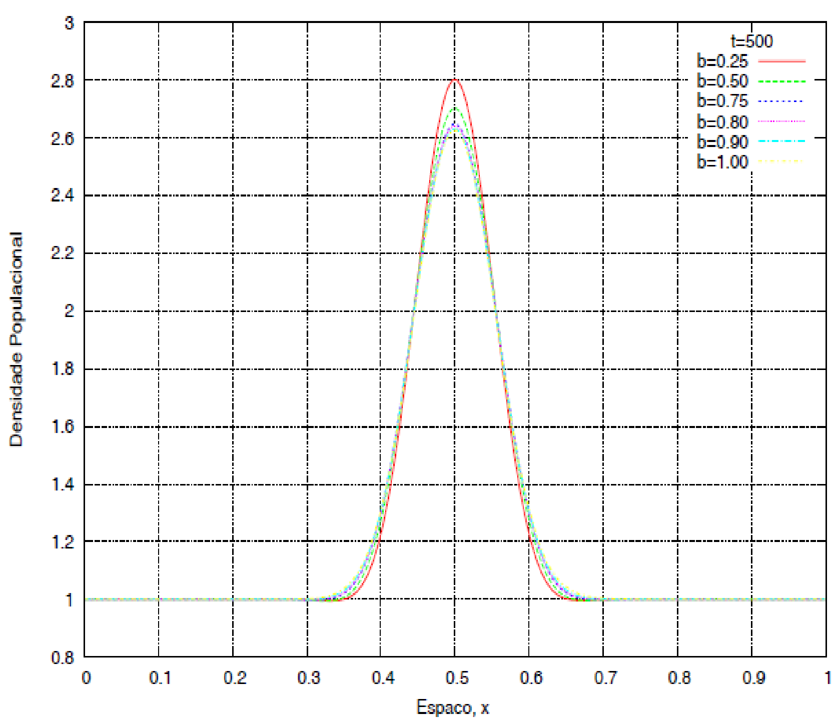

Figura 7: Evolução temporal do experimento para t = 500.
Fonte: Gráfico elaborado pelos autores.

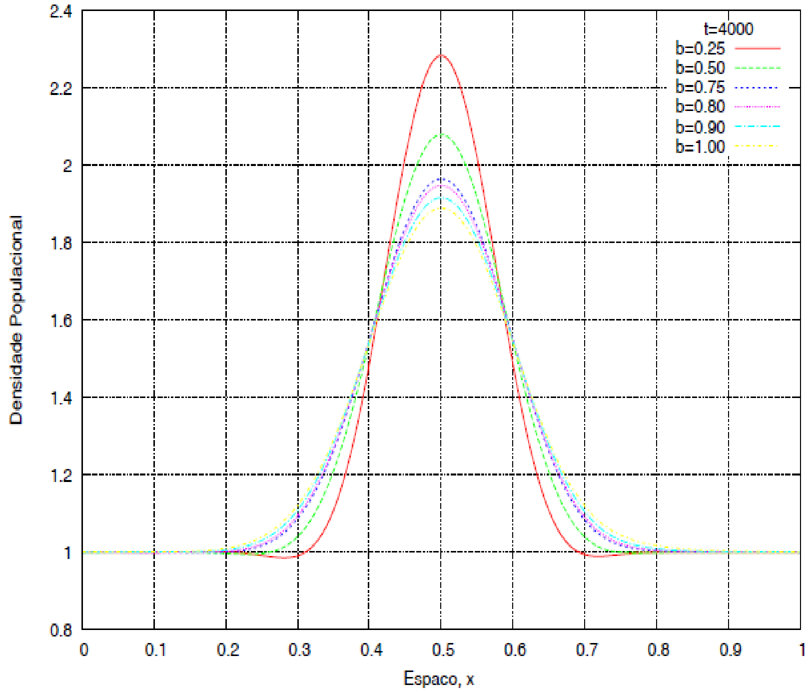

Figura 8: Evolução temporal do experimento para t = 4000.
Fonte: Gráfico elaborado pelos autores.

Observa-se na (Figura 7) que o comportamento acompanha o percentual de retenção referente à difusão, ou seja, verifica-se que existe não apenas uma relação na proporcionalidade dos parâmetros como na densidade populacional das espécies.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, a equação transiente de difusão-retenção foi usada para modelar a dinâmica de populações de uma única espécie de organismos em diferentes situações. Sua resolução numérica foi obtida usando-se o método de Galerkin com elementos finitos e com polinômios interpolantes de Hermite para a discretização espacial e o método de diferenças finitas de Euler, implícito para a discretização temporal.

A modelagem numérica apresentada possibilita avaliar a dinâmica de um processo qualquer para diversas situações de parâmetros de retenção, propiciando a simulação de cenários para uma grande variedade de problemas.

Neste contexto, a formulação apresentada neste trabalho representa um avanço do ponto de vista de problemas ecológicos. Para o problema de invasão, os resultados obtidos demonstram que a invasão de uma espécie que avança com um processo de retenção propicia uma melhor estratégia para o seu estabelecimento da espécie invasora. Esta característica, quantificada por β, associada a intensidade do efeito de retenção pode evitar uma possível extinção da espécie nativa. Estes resultados estão totalmente em concordância com as referências na literatura (BEVILACQUA; GALEÃO; COSTA, 2011a; OKUBO; LEVIN, 2001; BEVILACQUA; GALEÃO; COSTA, 2011b).

A maior vantagem do modelo matemático proposto e fornecer uma ferramenta confiável para o estudo da dispersão biológica ampliando os horizontes da pesquisa nesta área fornecendo cenários para uma grande variedade de problemas biológicos.

Os resultados qualitativos, nos leva a perceber a necessidade de um estreitamento entre as áreas de Modelagem Teórica e Numérica com os experimentos de campo que possam fornecer subsídios que validem este tipo de pesquisa. Neste contexto, muitos outros problemas poderiam ser avaliados na modelagem numérica proposta. Em particular, nos experimentos não se considerou a convecção, que poderia depender da densidade populacional, alternativamente poder-se-ia considerar relações mais complexas que tornassem o modelo mais realista.

Cabe mencionar também que se considerou neste trabalho, a dispersão no contexto de invasão biológica, onde dentre as características capazes de aumentar o potencial de invasão da espécie está a existência de um ciclo reprodutivo curto (REJM´ANEK, 1996). Assim, utilizar um modelo em que os indivíduos migrem e se reproduzam ao mesmo tempo pode ser considerado adequado. Contudo, existem muitas situações em que estes dois processos são restritos aos estágios diferentes da vida do organismo, requerendo a inclusão de estrutura etária (DENG; HALLAM, 2004).

Neste sentido, pode-se utilizar a compreensão adquirida no modelo unidimensional, desenvolvido neste trabalho, em modelos bidimensionais e a partir de uma parceria com profissionais de áreas biológicas, que possuem dados coletados, fornecer cenários que possam realmente servir de apoio às decisões e aos planejamentos que diminuam o impacto ambiental negativo das dispersões de algumas espécies.

5. REFERÊNCIAS

ANDOW, D. A.; KAREIVA, P. M.; LEVIN, S. A. Spread of invading organisms. **Lands Cape Ecology**, Hague, v. 4, n. 2/3, p. 177-188, 1990.

BEVILACQUA, L., GALEÃO, A. C. N. R, COSTA, F. P. On the Significance of Higher Order Differential Terms in Diffusion Processes. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, Rio de Janeiro, v. 33, n. 2, p. 166-175, 2011a.

_______. ; ________.; ________. A new analytical formulation of retention effects on particles diffusion processes. **Anais da Academia Brasileira de Ciência**, Rio de Janeiro, v. 83, n. 4, p. 1443-1464, 2011b.

DARWIN, C. **The origin of species by means of natural selection, or the preservation of favoured races in the struggle for life**. Sixth Edition. London: John Murray, 1872.

DENG, Q.; HALLAM, T. G. Numerical approximations for an age-structured model of a population dispersing in a spatially heterogeneous environment. **Mathematical Medicine and Biology**, Bethesda, v. 21, n. 3, p. 247-268, 2004.

DOBZHANSKY, T.; WRIGHT, S. Genetics of natural populations x dispersion rate in Drosophila pseudoobscura. **Genetics**, Bethesda, v. 28, n. 4, p. 304-340, 1943.

DRAKE, J. A.; MOONEY, H A., DICASTRI, F. *et al*. **Biological Invasion**: a Global Perspective. Chichester: Wiley and Sons, 1989.

EDELSTEIN-KESHET, L. **Mathematical models in biology**. New York: Random House, 1986.

ELTON, C. S. **The ecology of invasions by animals and plants**. London: Methuen and Company, 1958.

FISHER, R. A. The wave of advance of advantageous genes. **Annals of Eugenics**, v. 7, n. 4, p. 355-369, 1937.

HENGEVELD, R. **Dynamics of biological invasion**. London: Chapman and Hall, 1989.

KAREIVA, P. M. Experimental and mathematical analyses of herbivore movement: quantifying the influence of plant spacing and quality on foraging discrimination. **Ecological Monographs**, Washington, v. 52, n. 3, p. 261-282, 1982.

MACK, R. N.; SIMBERLOFF, D.; LONSDALE, W. M. *et al*. Biotic invasions: Causes, epidemiology, global consequences and control. **Issues in Ecology**, Washington, n. 5, p. 1-20, 2000.

MOONEY, H. A.; DRAKE, J. A. **Ecology of biological invasions of North America and Hawaii**. New York: Springer-Verlag, 1986.

OKUBO, A.; LEVIN, S. A. **Diffusion and Ecological Problems - Modern Perspectives**. 2th. New York: Spring-Verlag, 2001. (Series: Interdisciplinary Applied Mathematics, v. 14).

________.; MAINI, M. H.; WILLIAMSON, M. H. *et al*. On the spatial spread of the grey squirrel in Britain. **Proceedings of the Royal Society of London**, Great Britain, v. 238, n. 1291, p. 113-125, 1989.

OLIVEIRA, M. R. V. Defesa sanitária: epidemias globais. In: SANTOS, M. G. B. (Org.). **Artigos técnicos divulgados na mídia**: coletânea. Brasília: Embrapa Recursos Genéticos e Biotecnologia, 2007.

PIMENTEL, D. L.; LACH, R. Z.; ZUNIGA, R. *et al*. Environmental and economic costs of nonindigenous species in the United States. **BioScience**, Washington, v. 50, n. 1, p. 53-65, 2001.

REJM´ANEK, M. A theory of seed plant invasiveness: The first sketch. **Biological Conservation**, v. 78, n. 1-2, p. 171-181, 1996.

SKELLAM, J. G. Random dispersal in theoretical populations. **Biometrika**, Oxford, v. 38, n. 1/2, p. 196-218, 1951.

VITOUSEK, P. M.; D'ANTONIO, C. M.; LOOPE, L. L. *et al*. Biological invasions as global environmental change. **American Scientist**, North Carolina, v. 84, p. 468-478, 1996.

ZILLER, S. R. Plantas exóticas invasoras: a ameaça da contaminação biológica.

Ciência Hoje, Rio de Janeiro, v. 30, n. 178, p. 77-79, 2001.

Article **received** on October 23, 2017.
Accepted on January 20, 2018.