O APELO AO AXIOMA DA ESCOLHA NA DEFINIÇÃO DE CERTAS OPERAÇÕES ARITMÉTICAS

Guilherme T. M. Schettini[1]

RESUMO: Este artigo, de natureza expositiva, tem por objetivo apresentar um uso particular do axioma da escolha na filosofia matemática, a saber, na definição da multiplicação com infinitos fatores. Para isso, serão antes apresentadas a disciplina da filosofia matemática enquanto distinta da matemática, as definições das noções de número e operação aritmética, e a forma geral do axioma da escolha. Todas essas noções estão presentes na obra de Bertrand Russell, e algumas são devidas a ele.

PALAVRAS-CHAVE: Axioma da Escolha. Operações Aritméticas. Filosofia Matemática.

Abstract: This article, of expository nature, aims to present a particular use of the axiom of choice in mathematical philosophy, namely the definition of multiplication with infinite factors. For this, will be brought before the discipline of mathematical philosophy as distinct from mathematics, the definitions of the notions of number and arithmetic operation, and the general form of the axiom of choice. All these notions are present in the work of Bertrand Russell, and some are due to him.

Keywords: Axiom of Choice. Arithmetic operations. Mathematical philosophy.

Se nos questionarmos, a respeito do artigo que se segue, qual é a área da filosofia em que está inserido, parecerá evidente alocá-lo no campo da filosofia matemática, e, em particular, na filosofia matemática tal como entendida por Bertrand Russell.

A filosofia matemática, assim como a matemática, tem por objeto de estudo o que se poderia chamar de *elementos da matemática* (números, operações aritméticas, funções etc.), mas, diferentemente da matemática – que se desenvolve numa complexidade crescente -, persegue a simplicidade lógica.

De um ponto inicial (digamos, da noção de número natural), a matemática procurará evoluir para noções mais complexas (dos números naturais para os inteiros, dos inteiros para os fracionários, dos fracionários para os reais, dos reais para os complexos etc.), e a filosofia matemática, para noções mais simples (um de nossos propósitos aqui é justamente o de encontrar uma noção logicamente anterior aos números naturais).

Assim, historicamente, sempre que se partiu de conhecimentos matemáticos empíricos (as regras de agrimensura dos egípcios, por exemplo) para formulações gerais pelas quais aqueles conhecimentos se justificaram (os postulados de Euclides, no caso), praticou-se, não a matemática, mas a filosofia matemática. No entanto, uma vez estabelecidos esses postulados, todos os seus desdobramentos dizem respeito à matemática.

O que separa a filosofia matemática da matemática, em suma, não é outra coisa senão o sentido da investigação sobre um mesmo assunto: os elementos da matemática. Resta saber, dos elementos acima exemplificados, qual é aquele de que partem ambas as disciplinas.

Com efeito, se considerarmos que toda a matemática tradicional consiste de proposições sobre números naturais (o que, ademais, já foi demonstrado por Peano), e que a noção de número natural é suficientemente simples para a filosofia matemática (em

[1] UFRJ.

específico, para a sua tarefa de definir os elementos da matemática, isto é, de reduzi-los a noções logicamente mais simples), não teremos por que eleger um outro elemento.

Que é, pois, um *número natural*? De fato, poder-se-ia argumentar que esta dúvida está longe de autêntica, dado que já se afigurou a uma série de filósofos. Mas a resposta da filosofia matemática a essa questão é inquestionavelmente original, e tem o mérito de apontar, de uma maneira que acreditamos definitiva, a falha das anteriores.

O erro mais comum dos antigos foi o de definir *número* como *pluralidade*. De fato, as pluralidades são exemplos de números particulares (um trio de gatos, digamos, é um exemplo do número 3), mas não são, em absoluto, a definição desses números (o número 3 não é *apenas* um trio de gatos).

A definição de um número particular, para não ser inexata, deve contemplar todas as pluralidades que exemplificam esse número, e só elas. De uma maneira didática, podemos pensar em tais pluralidades como elementos de uma mesma *classe*. Uma classe é a extensão de uma propriedade ou condição (a propriedade "ser humano", por exemplo, tem como extensão a classe de todos os 7 bilhões de seres humanos vivos).

Nesses termos, o conceito de ser humano seria definido pela enumeração de todos os elementos da classe "ser humano" (esta seria, sem dúvida, uma definição extravagante, mas, ainda assim, correta), e o conceito de um número particular (o número 3, por exemplo), mediante a enumeração de todas as pluralidades que o exemplificam (todos os trios existentes, no caso).

No entanto, ao contrário do que se passa com o número total de humanos, cuja quantidade é grande, mas finita, não podemos enumerar, um a um, todos os trios existentes, dado que estes são presumivelmente infinitos. Assim, não será possível definir um número particular de uma maneira *extensional* (a definição extensional é justamente aquela que se dá pela enumeração de todos os membros pertencentes à classe que se quer definir).

Se não somos capazes de definir um número particular apresentando, uma a uma, todas as pluralidades que o exemplificam, devemos apelar, então, para uma definição *intensional*, isto é, para a enunciação da propriedade essencial que conecta todas essas pluralidades a um mesmo número particular.

Dessa forma, substituímos a questão "o que é um número?" por outra que lhe é equivalente: "qual é a propriedade essencial de todas as pluralidades que exemplificam um determinado número?". No caso específico do número 3, o que todos os trios têm em comum que os diferenciam de todas as unidades, todas as duplas, todos os quartetos etc.?

E é desta forma que a filosofia matemática responde essa questão: os trios são de tal maneira constituídos que, entre dois trios quaisquer, é sempre possível associar cada elemento de um a um único elemento do outro. Há, portanto, entre os trios em questão, uma relação que poderíamos chamar de *um-para-um* (a exemplo do que ocorre na relação marido-esposa nas sociedades monogâmicas: o número de maridos vivos é necessariamente igual ao de esposas vivas, de modo que podemos associar, para cada marido, uma única esposa).

Quando, entre duas classes, vigora uma relação de um-para-um (como entre duas classes quaisquer de trios ou entre as classes dos maridos e das esposas), dizemos que as classes em questão são e*quipotentes*. De posse desse vocabulário, já podemos definir número.

Um número particular é, pois, a classe de todas as classes que lhe são eqüipotentes. O número 3, por exemplo, é a classe de todos os trios; o número 2, a de todas as duplas; o número 1, a de todas as unidades. Cada um desses números particulares é uma classe que consiste de infinitos membros, e não de um número particular de membros (o número 3, por exemplo, não é definido como uma classe de 3 elementos, mas de infinitos trios).

Mas por que batizamos a classe de todos os trios de *número 3*, a classe de todas as duplas de *número 2*, e a classe de todas as unidades de *número 1*? Ora, aqui precisamos admitir: o fazemos por convenção.

Nada nos impediria de chamar de *número 1* a classe de todas as duplas existentes, ou de *número 2*, a de todas as unidades. Neste caso, entenderíamos por 1 o que entendemos atualmente por 2, e por 2, o que entendemos por 1. Não obstante, ainda nesse cenário, o *número 1* e o *número 2* seriam classes de classes eqüipotentes.

Chegamos, então, ao seguinte ponto: o nome que atribuímos a uma classe é arbitrário, mas, uma vez atribuído este nome, a sua definição deve capturar o que há de essencial nesta classe (ou elencar todos os seus membros, o que é inviável no caso dos números).

Praticando a filosofia matemática, reduzimos a noção de *número* à noção de *equipotência entre classes*, que lhe é anterior. Tal antecedência é simples de se verificar: com efeito, é mais fácil saber que, nas sociedades monogâmicas, o número de maridos vivos é igual ao de esposas vivas, que descobrir que número é esse.

A partir de agora, podemos tomar como primitiva a noção de classe. Uma noção primitiva é inteligível e não possui definição. Trata-se de um artifício necessário para romper a cadeia de definições (de fato, sempre que definimos um termo, o fazemos por meio de outro, e, em algum momento, há que se estabelecer uma noção primitiva).

De posse da noção de classe, estamos aptos a definir um outro importante *elemento* da matemática: as operações aritméticas. O que são a adição e a multiplicação, especificamente?

De acordo com a filosofia matemática, só há um método correto para a definição das operações aritméticas: deve-se construir uma classe com o número requerido de elementos para o resultado da operação, provando a existência desse resultado.

No caso da adição, se quisermos definir, por exemplo, a soma $\mu + \mu$, sendo μ um número cardinal qualquer, devemos construir uma classe de ($\mu + \mu$) elementos. De que maneira fazemos isso? Primeiramente, chamamos de α uma classe qualquer com μ elementos. Em seguida, formamos todos os pares ordenados cuja primeira componente é uma classe consistindo de um único membro de α e segunda componente é o conjunto vazio. Chamamos de α'_1 a classe de todos esses pares. Depois, formamos todos os pares ordenados cuja primeira componente é o conjunto vazio e segunda componente é uma classe consistindo de um único membro de α. Chamamos de α'_2 a classe de todos esses pares. Finalmente, promovemos a união das classes α'_1 e α'_2: essa união possuirá ($\mu + \mu$) elementos, e será a definição da operação $\mu + \mu$.

Procedendo de maneira análoga, definimos a adição entre dois cardinais distintos, $\mu + \nu$, ou mesmo entre um número qualquer de cardinais, $\mu + \nu + \xi + ...$ (neste caso, dado que $\mu + \nu + \xi + ...$ é equivalente a $(\mu + \nu) + \xi + ...$, bastará aplicar, passo a passo, o procedimento anterior).

Como se nota, a filosofia matemática trata a definição da adição como uma mera questão de dispositivo técnico apropriado para a construção da classe esperada. O que ela faz, na verdade, é reduzir a *adição* entre números cardinais à *união* entre classes. Um tipo equivalente de redução ocorrerá na definição da multiplicação com finitos fatores.

De início, pensemos em como definir a multiplicação entre dois números cardinais quaisquer, μ x ν. Se chamarmos de α uma classe qualquer com μ elementos e β uma classe qualquer com ν elementos, o número total de pares ordenados possíveis de serem formados com primeira componente em α e segunda componente em β será exatamente (μ x ν), e a classe que contém todos esses pares será a definição da operação μ x ν.

Cabe salientar que essa operação entre duas classes quaisquer, responsável pela formação de todos os pares ordenados com primeira componente em uma e segunda componente em outra, é denominada *produto cartesiano* de classes. Com efeito, a *multiplicação* entre dois números cardinais quaisquer é definida a partir do *produto cartesiano* entre as classes que lhe são correspondentes (isto é, que possuem o seu número de elementos).

Mas como definir a multiplicação para um número de fatores maior do que dois, mas finito? Pensemos, por exemplo, na multiplicação com três fatores, μ x ν x ξ. Seguindo o procedimento anterior, definimos uma classe α com μ elementos, uma classe β com ν elementos e uma classe θ com ξ elementos. Feito isso, a definição da operação será a classe de todos os trios ordenados possíveis de serem formados com primeira componente em α, segunda componente em β e terceira componente em θ.

O problema está, justamente, no caso em que o número de fatores da multiplicação é infinito. Neste caso, ou lançamos mão do polêmico axioma da escolha, da teoria dos conjuntos, ou não somos capazes de definir essa operação.

O axioma da escolha é um dos axiomas fundadores da teoria canônica dos conjuntos[2]. Seu enunciado formal é o que segue: "dada qualquer classe de classes mutuamente exclusivas, das quais nenhuma é vazia, há pelo menos uma classe que tem exatamente um elemento em comum com cada uma das classes dadas".

Como se nota de imediato, o axioma da escolha postula a existência de uma "nova classe" a partir de classes dadas inicialmente. A rigor, outros axiomas da teoria dos conjuntos procedem de maneira análoga (pensemos, por exemplo, no axioma da potência, que assevera que "para toda classe x existe uma classe y que possui como elementos todas as subclasses de x"), oferecendo regras para a formação da "nova classe" (no caso do axioma da potência, a regra de que os elementos da "nova classe" sejam todas as subclasses da "classe inicial"). Uma subclasse de uma classe, vale lembrar, é qualquer agrupamento que consiste apenas de elementos dessa classe. O conjunto vazio é subclasse de todas as classes.

Mas, ao contrário do que sugere uma investigação apressada, a natureza do axioma da escolha é distinta da dos demais axiomas da teoria dos conjuntos. Isso se observa mais nitidamente ao se confrontar estes com uma das formas equivalentes ao axioma da escolha: o teorema da boa ordenação.

---

[2] Aqui, referimo-nos à teoria dos conjuntos de Zermelo-Fraenkel como *teoria canônica dos conjuntos*, dado que esta tem sido a mais utilizada na matemática.

Foi através do teorema da boa ordenação que Ernst Zermelo, em 1904, tornou público o axioma da escolha, que implica e é implicado por aquele. Segundo esse teorema, “toda classe pode ser bem ordenada”, isto é, “todas as suas subclasses possuem *primeiro elemento*”. Para os nossos propósitos, podemos adaptar o teorema da boa ordenação para o seguinte enunciado: “dada qualquer classe de classes mutuamente exclusivas, todas essas classes possuem primeiro elemento”.

De maneira intuitiva, teremos clara a equivalência entre o axioma da escolha e o teorema da boa ordenação se pensarmos que o primeiro elemento de cada classe inicial [de que trata o último] será exatamente o elemento *escolhido* para fazer parte da *classe de escolha* (isto é, da classe que possuirá exatamente um elemento em comum com cada uma das classes dadas inicialmente) no enunciado do axioma da escolha.

No entanto, está longe de claro que, para todos os casos possíveis, exista uma regra para a formação da *classe de escolha*, ou, o que é o mesmo (já não fazemos mais a distinção), que todas as classes dadas inicialmente possuam primeiro elemento.

Se pensarmos em classes de números naturais (isto é, cujos elementos são números naturais), haverá sempre um primeiro elemento para cada classe, pois os números naturais são bem ordenados (isto é, possuem menor elemento), pelo que será sempre possível formar uma classe de escolha. Mas o mesmo não se aplica, por exemplo, aos números reais.

Nestes casos, não há nenhuma regra para a formação da classe de escolha, pois não há nenhuma lei que nos indique qual é o primeiro elemento de cada classe. O axioma da escolha terá de ser a própria regra.

Assim, ao contrário dos demais axiomas da teoria dos conjuntos, que oferecem regras para a construção de novas classes, o axioma da escolha postula a existência dessas novas classes sem oferecer as regras (ou melhor, sendo ele próprio a regra). Vejamos uma ilustração.

É conhecido, na literatura, o exemplo de Russell dos pares de sapatos e de meias. De uma classe de infinitos pares de sapatos, é possível extrair a existência de uma nova classe, contendo exatamente um sapato de cada par inicial? A pergunta, na verdade, quer saber se há uma regra (fora o axioma da escolha) que garanta a existência da nova classe. E, de fato, é possível enunciar uma: dado que os sapatos são “bem ordenados”, isto é, há sapatos para o pé direito e sapatos para o pé esquerdo, uma regra do tipo “selecionar o sapato para o pé direito de cada par” nos dará a nova classe, que será exatamente a de escolha, sem a necessidade do axioma da escolha.

No entanto, para o caso de infinitos pares de meias, como estas não são “bem ordenadas” (não há, até onde sabemos, meias para o pé direito e meias para o pé esquerdo), a única alternativa para a formação da classe de escolha, que contém exatamente uma meia de cada par, é o axioma da escolha. Por ser utilizado só quando é esperado (isto é, na ausência de outras regras), o axioma da escolha soa bastante arbitrário.

Esta, no entanto, não é a única polêmica na qual ele está envolvido.

As investigações do século XX demonstraram a independência do axioma da escolha em relação aos demais axiomas da teoria dos conjuntos, o que significa que aquele axioma é consistente com os demais, mas a sua negação também o é.

Além disso, utilizando o axioma da escolha, foi demonstrado que seria possível dividir uma esfera em um número finito de pedaços e, com estes pedaços, construir duas novas esferas do mesmo tamanho da original. Este resultado, que evidencia um absurdo físico, é chamado de paradoxo de Banach-Tarski.

Voltemos, agora, ao desafio de definir a multiplicação no caso de infinitos fatores. E, à primeira vista, a tarefa é simples: à semelhança do que fizemos nos casos anteriores, para cada número cardinal, estabelecemos uma classe com o número de elementos correspondente. Depois, definimos a multiplicação entre infinitos fatores como a classe consistindo de todas as n-uplas ordenadas (isto é, de todas as sequências ordenadas de n elementos - no caso específico, com n igual a infinito) possíveis de serem formadas com primeira componente na primeira classe, segunda componente na segunda classe, terceira componente na terceira classe etc. (dado que tenhamos definido uma primeira, segunda, terceira etc. classes).

Mas o que, no caso, garante a existência da primeira (e das demais) n-upla(s) ordenada(s), senão o axioma da escolha?

De fato, sem o axioma da escolha, não somos capazes de assegurar sequer a existência de uma classe de escolha, pelo que não podemos formar a classe de todas as n-uplas ordenadas definidora da multiplicação com infinitos fatores.

Fica assim demonstrada a necessidade do axioma da escolha na definição da multiplicação com infinitos fatores.

Referências Bibliográficas:

RUSSELL, B. *Introdução à Filosofia Matemática.*. Tradução e notas de Augusto J. Franco de Oliveira. Centro de Estudos de História e Filosofia da Ciência da Universidade de Évora. 2006.

WHITEHEAD, A; RUSSELL, B. *Principia Mathematica. Volume 1.* Cambridge, U.P. 1968.

] WHITEHEAD, A; RUSSELL, B. *Principia Mathematica. Volume Three.* Merchand Books. 2009.

ZERMELO, E. *Proof that every set can be well ordered.* In: From Frege to Gödel: a Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931. Harvard University Press. 1967.

ZERMELO, E. *A New Proof of the Possibility of a Well Ordering.* In: From Frege to Gödel: a Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931. Harvard University Press. 1967.