A matemática como método da lógica e as quatro operações aritméticas no T*ractatus* de Wittgenstein

Ralph Leal Heck

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCe)

Resumo: O presente artigo tem o objetivo de refletir sobre a matemática como método da lógica, definição presente no *Tractatus* de Wittgenstein. Esta questão trás consigo as definições das quatro operações elementares aritméticas de acordo com a visão do filósofo austríaco, as relações e diferenças da matemática como um método da lógica e a própria lógica e suas proposições. Para executar esta tarefa, inicio apresentando o que significa lógica e suas proposições em seguida, introduzo a matemática como um método da lógica e exemplifico este método com a apresentação da definição de número, soma e produto aritmético complementando-os com as operações restantes: subtração e divisão. Por fim, pontuo as semelhanças e diferenças entre a lógica tomada como uma imagem especular do mundo e a matemática como um método da lógica.

Palavras-chave: Lógica; Filosofia da Lógica; Filosofia da Matemática

Abstract: The present study is a proposal for a reflection about mathematics as a logical method in Wittgenstein's *Tractatus* definition. This matter brings the definition of the four fundamental arithmetical operations according with the Austrian philosopher's view, as well, the relations and differences of mathematics as a logical method and the logic itself and its propositions. To perform this task, I begin introducing what means logic e its propositions, then I introduce mathematics as a logical method and exemplify such method presenting the definition of arithmetical sum and product, completing the definition with the remaining operations: subtraction and division. Finally, I enumerate the resemblances and differences between logic taken as world speculative image and mathematics as a logical method.

Keywords: Logic; Philosophy of Logic; Philosophy of Mathematics

Vamos iniciar nossa exposição com uma caracterização geral do que significa "proposições da lógica". Para Wittgenstein, ela "é a marca característica particular das proposições lógicas que sua verdade se possa reconhecer no símbolo tão somente(...)"[1] Isto significa que a tautologia e a contradição dependem apenas da comparação entre estruturas lógicas para desempenhar sua função. Outra importante observação é que para a finalidade de comparação entre estruturas, ambos os casos limite funcionam da mesma maneira, isto é, "para o mesmo fim, é claro que se poderia utilizar ao invés das tautologias, também as contradições."[2] Deste modo, passaremos a utilizar o termo tautologia para expressar *as proposições da lógica*. Em primeiro lugar, por ser o tipo de proposição mais citado no *Tractatus* e, em segundo lugar, por resultar da comparação entre estruturas contraditórias, como por exemplo: $((p \wedge \neg p) \wedge (q \wedge \neg q)) \leftrightarrow (\neg(p \vee \neg p) \vee \neg(q \vee \neg q))$.

Tautologia ($\tau\alpha\acute{\upsilon}\tau o\lambda o\gamma\acute{\iota}\alpha$) é uma expressão de origem grega, que significa "a mesma idéia" (*tauto*: a mesma; e *logos*: palavra/idéia) ou "repetição do que foi dito". Segundo Glock[3], Wittgenstein foi o primeiro a caracterizar a lógica como tautológica: "As proposições da lógica são tautologias"[4]. Criando um limite claro entre proposições contingentes e proposições lógicas (analíticas). Esta caracterização de proposições propriamente lógicas separa-o da concepção fregeana e russelleana de que a lógica descreve entidades de alguma natureza. Como vimos ao longo de nossa exposição, a exigência da tradução de uma estrutura por outra, prova que não há entidades, constantes ou objetos lógicos. Qualquer caracterização de quantificação, generalização ou estrutural são sempre, implicitamente, descrições de proposições que contêm composições entre objetos e *possibilidades* de valores de verdade.

Não é pretensão da tautologia mostrar como as coisas estão. As proposições da lógica são *sem sentido* (*sinnlos*): "As proposições da lógica, portanto, não dizem nada (são as proposições analíticas)."[5] As tautologias se constituem como tal independentemente das contingências (de ter sentido), uma vez que só é necessária a observação da intercambialidade de estruturas. Por exemplo, na linha 3 da tabela anterior $(q \rightarrow p)$ é uma tautologia se comparada à ((q | (p | p)) | (q | (p | p))). Não dependendo dos valores de verdade para saber que: $(q \rightarrow p) \Leftrightarrow$((q | (p | p)) | (q | (p | p))). Do mesmo modo que $(q \wedge p) \Leftrightarrow ((q \mid p) \mid (q \mid p))$, na linha 15 ou qualquer outra comparação entre a forma descrita na proposição 5.101 e suas respectivas traduções pela barra de Sheffer. De antemão, já podemos ver que o

1 WITTGENSTEIN, L. *Tractatus Logico-Philosophicus*, 1922, aforismo 6.113.

2 Ibid., aforismo 6.1202.

3 GLOCK, H.J. *Dicionário Wittgenstein,* 1998, p.346.

4 WITTGENSTEIN, L. *Tractatus Logico-Philosophicus*, 1922, proposição 6.1.

5 Ibid., aforismo 6.11.

objetivo da tautologia não é descrever a realidade, mas refletir a sintaxe adjacente às estruturas da linguagem, e às estruturas da própria realidade[6]. A função da proposição lógica é evidenciar como os elementos da proposição ou as proposições estão configurados.

Se utilizarmos tautologias mais evidentes, como $\neg(p \wedge \neg p)$ ou $((p \rightarrow p) \leftrightarrow p)$, fica claro que não queremos dizer que as tautologias expressem verdades à priori[7]. Apenas que a lógica não possui axiomas fundamentais de onde podemos derivar outras proposições como pensavam Frege e Russell, a função da lógica se mostra completamente diferente: ela faz ver a forma lógica. Assim, postular verdades lógicas passam a ser meras notações em estruturas auto-evidentes.[8] Ou mesmo, poderíamos pensar, conforme a *velha lógica*, que as generalizações são proposições lógicas. Neste caso, as generalizações condensam um conjunto de possibilidades e podem ser traduzidas pela descrição de todos os casos que compõem a generalização. As proposições da lógica devem ser verdadeiras *a priori*, na medida em que não dependem do valor de verdade de suas componentes, e com isso diferencia-se o significado da demonstração *na* lógica, da demonstração lógica de uma proposição com sentido[9]. A diferença é apontada por Wittgenstein no aforismo 6.1264:

> A proposição com sentido enuncia algo e sua demonstração mostra que assim é; na lógica, toda proposição é a forma de uma demonstração.Toda proposição da lógica é um *modus ponens* representado em sinais. (E o *modus ponens* não se pode exprimir por meio de uma proposição.).

Então as proposições lógicas, embora sem sentido, acrescentam algo? Sim, na medida em que elas *mostram* a estrutura da realidade e da linguagem. Este *mostrar* é a porta de entrada para Wittgenstein tematizar tudo o que é pressuposto, ou melhor, aquilo que é indizível e também uma importante característica para nossa avaliação da linguagem: as proposições lógicas são proposições teorético-metafísica, pois evidenciam as regras de construção de qualquer teoria de que lancemos mão.

Mas, em que sentido podemos entender a lógica de Wittgenstein como uma teoria geral?

6 WITTGENSTEIN, L. *Tractatus Logico-Philosophicus*, 1922, aforismo 6.12

7 Ibid., aforismo 6.111.

8 Ibid., aforismo 6.1223.

9 Ibid., aforismo 6.1263.

Se tomarmos a lógica como uma teoria em seu sentido estrito, isto é, a teoria como modelo com a seguinte definição: uma teoria é composta por uma linguagem formal e um conjunto de regras de inferência, com o objetivo de derivar (concluir) uma proposição de uma ou mais premissas que são antecedentemente supostas (axiomas) ou derivadas (teoremas), de modo a formular e avaliar as propriedades intrínsecas da estrutura ou descrever a partir do modelo os fatos. Nestes termos, a lógica no *Tractatus não é* uma teoria.

Entretanto, se considerarmos que a lógica é “uma imagem especular do mundo” e que “a lógica é transcendental”, temos que Wittgenstein, talvez a contragosto, desenvolva uma teoria metafísica que *pressupõe* uma regra de construção (podemos expressar todas as possibilidades lógicas com apenas um juntor);uma regra de tradução (expressemos as estruturas lógicas com a notação que quisermos, *salva veritate*); uma regra de interpretação (cada proposição fornece ½ chance de ser verdadeira e ½ chance de ser falsa); e uma regra de inferência (“Toda proposição da lógica é um *modus ponens* representado em sinais”)[10].De onde, aí sim, podemos construir teorias em seu sentido estrito, determinando arbitrariamente quais regras e quais proposições são válidas no sistema.

Ora, se a lógica concebida por Wittgenstein é a própria expressão dos pressupostos da inteligibilidade e da realidade mesma e outras teorias só podem ser erigidas tomando como base a lógica, qual o sentido de afirmar que “a matemática é *um método*[11] da lógica”?

A matemática como método da lógica

Wittgenstein dispõe de dois blocos de referência à matemática no *Tractatus*. As proposições 6.02–6.031 que explicam a definição de número segundo a lógica por meio das somas dos números e as proposições 6.2–6.241, que definem o produto entre dois termos numéricos. A avaliação desta questão tem duas importantes contribuições para nosso objetivo: 1) Até que ponto as equações matemáticas se assemelham às tautologias e 2) o tipo de concepção matemática apresentada contribui de algum modo para nossa avaliação do alcance da linguagem?

10 Isto está em consonância com o aforismo 6.124.

11 Itálico nosso.

Definição de número

Podemos dizer que os temas centrais da "filosofia da matemática" de Wittgenstein são a definição indutiva[12] de número e o critério de igualdade. Estes temas nos fornecerão o método de geração de termos gerais (equações matemáticas) e o que significa operar com números. Vejamos a proposição 6.02:

> E *assim* chegamos[13] aos números: defino
>
> $x = \Omega^{0\prime} x$ Def.
>
> e $\Omega' \Omega^{\nu\prime} x = \Omega^{\nu+1\prime} x$ Def.
>
> Segundo as regras notacionais, escrevemos, pois, a série
>
> $x, \Omega' x, \Omega' \Omega' x, \Omega' \Omega' \Omega' x, \ldots,$
>
> Assim:
>
> $\Omega^{0\prime} x, \Omega^{0+1\prime} x, \Omega^{0+1+1\prime} x, \Omega^{0+1+1+1\prime} x, \ldots,$
>
> Portanto, ao invés de "$[x, \xi, \Omega' \xi]$" escrevo:
>
> "$[\Omega^{0\prime} x, \Omega^{\nu\prime} x, \ \Omega^{\nu+1\prime} x]$".
>
> E defino:
>
> 0+1=1 Def.
>
> 0+1+1=2 Def.
>
> 0+1+1+1=3 Def.
>
> (etc.)

À primeira vista, já podemos perceber que Wittgenstein traduz o conceito de número por uma operação reiterada sucessiva: "$[x, \xi, \Omega' \xi]$", ele aduz esta definição a partir da proposição anterior: "a forma geral da operação $\Omega'(\overline{\eta})$ é, portanto: $[\xi, N(\overline{\xi})]'(\overline{\eta})(= [\overline{\eta}, \xi, N(\xi)])$.Essa é a forma mais geral da passagem de uma proposição a outra.".[14]

Como bem observado por Frascola[15], a substituição de $\overline{\eta}$ por p resulta na própria definição geral da proposição: $[\xi, N(\overline{\xi})]'(p)(= [p, \xi, N(\xi)])$.

Isto significa que a definição de número e seu consecutivo baseiam-se na quantidade de reiterações de *uma mesma operação*, de modo que "Ω"(ômega) represente uma mesma operação lógica interada sobre uma proposição "*x*" (elementar ou complexa), "ν" (nu) vezes de modo que $\nu = 0 + 1 + 1 \ldots + 1$, com

12 Indução matemática.

13 Wittgenstein chega aos números a partir do aforismo 6.01, onde se reiteram operações lógicas para formar outras proposições.

14 WITTGENSTEIN, L. *Tractatus Logico-Philosophicus*, 1922, aforismo 6.01.

15 FRASCOLA, P. *Wittgenstein's Philosophy of Mathematics,* 1994, p.2.

uma quantidade de "+1" equivalente ao número de reiterações de uma dada operação lógica "Ω" e o " ' " (a aspa invertida) signifique "a forma de um resultado da aplicação de uma operação à uma dada base"[16]. Assim, a partir da apresentação do termo "$\Omega^{0+1+1+1}$" Wittgenstein deriva o numeral 0+1+1+1 = 3.Esta explicação poderia satisfazer a definição de número com certa tranquilidade. Mas, uma série de questões ficam posta em aberto.

Para seguir um programa de passos bem definidos, consideraremos a igualdade " = " como a noção primitiva de nossa discussão e as operações matemáticas como operações baseadas no processo de reiteração e operação de parêntesis[17]. Nós iremos usar o seguinte critério de definição da igualdade aritmética dos números inteiros de modo a entendermos em termos lógicos o significado das operações aritméticas, que encerra sua filosofia da matemática[18]:

1. Para $\{a, b, c \in \mathbb{N}\}$ se a = b, então a + c = b + c;
2. Para $\{a, b, c \in \mathbb{N}\}$ se a = b, então a − c = b − c;
3. Para $\{a, b, c \in \mathbb{N}\}$ se a = b, então ac = bc;
4. Para $\{a, b, c \in \mathbb{N}\}$ se a = b e $c \neq 0$, então $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$.

A idéia aqui é demonstrar a possibilidade das quatro operações aritméticas básicas e, por consequência, demonstrar o que Wittgenstein entende por igualdade nestes termos. Quando ele expõe com certa rispidez que a=b é o mesmo que a=a e que qualquer outra elucubração é mera perda de tempo, ele pressupõe que entendamos sua *filosofia da matemática*. Para evitar que sejamos levados a vácuos na interpretação de certos sinais que ele mesmo usa para definir outras propriedades não matemáticas (a identidade ontológica), no decorrer de cada passo iremos esclarecer eventuais questões que se possam lançar dúvida sobre o papel da aritmética na lógica do *Tractatus* e, passo a passo, tentar fazer evidente o que são os números e suas operações.

Estando em posse, agora, de todos os pressupostos e critérios para elaborar a definição aritmética, vamos apresentá-la:

---

16 Ibid., p.8.

17 Já vimos nos capítulos anteriores que os parêntesis para Wittgenstein nada significam. (cf. WITTGENSTEIN, L. *Tractatus Logico-Philosophicus*, 1922, aforismos 4.441; 5.461; 5.501).

18 Entendemos que Wittgenstein só consegue ir até os números naturais, que ele chama de inteiros em sua definição aritmética (cf. WITTGENSTEIN, L. *Tractatus Logico-Philosophicus*, 1922, aforismo 6.03).

A definição de soma

Como vimos acima, se $\Omega^{0+1+1+1}{}'$ é traduzível por 3 e basea-se na reiteração de uma operação lógica “Ω” , teríamos um grave problema tipológico na operação de números que amplificaria o problema do Axiom of infinity de Russell. Se por “Ω” traduzíssemos um determinado tipo de operação, então teríamos um sistema numérico para cada operador lógico disponível sustentando uma *teoria de classes*, o que seria pior do que a infinidade de conjuntos equipotentes de conjuntos contendo infinitos objetos de Russell.

Graças à exigência de tradutibilidade (sinonímia) dos operadores e suas operações, como vimos nos itens acima, podemos dizer: se “Ω^{ν}” expressa uma operação lógica reiterada ν vezes e qualquer que seja a operação, ela pode ser traduzida por outras operações, então, “Ω” expressa qualquer operação lógica aplicada uma única vez e seu expoente expressa certa quantidade de aplicações dessa operação lógica, *salva veritate*.

Para melhor exemplificar as operações lógicas envolvidas no conceito de número e resguardar os operadores matemáticos para as considerações finais deste tópico, vamos fazer a mesma caracterização que Frascola:

> “Ω^{0}’x” significa o mesmo que “x”,
> “Ω^{S0}’x” significa o mesmo que “Ω’x”,
> “Ω^{SS0}’x” significa o mesmo que “Ω’Ω’x”,
> “Ω^{SSS0}’x” significa o mesmo que “Ω’Ω’Ω’x”,
> E assim por diante, para cada número $n \geq 0$ de ocorrências de “*S*”.[19]

Seguindo esta caracterização de soma/reiteração, nos parece que Wittgenstein utiliza o número como uma notação que exibe a forma comum a todas as proposições complexas (ou simples no caso do zero) que podem ser instanciadas pela quantidade de operações lógicas descrita por “Ω”. Como por exemplo: “é dia” ou “está chovendo” está para “Ω^{0}’x”, como “Ω^{S0}’x” está para: ¬“é dia” ou ¬“está chovendo”, como “Ω^{SS0}’x” está para: ¬¬“é dia” ou ¬¬“está chovendo”[20]. Assim, uma dada proposição reiterada de ν operações lógicas pode ter um acréscimo de “μ” (mi) operações de modo que a notação “$\Omega^{\nu+\mu}{}'$” seja parte da aritmética e por conseguinte a expressão $\nu + \mu$.

19 FRASCOLA, P. *Wittgenstein's Philosophy of Mathematics,* 1994, p.9 [tradução livre do autor].

20 Frascola estende essa concepção de reiteração para propriedades e, por conseguinte, para descrições definidas. Discordamos em absoluto desta caracterização, uma vez que, a definição de uma relação aRb não permite que R seja uma relação simétrica, logo, é uma relação inoperável nos termos de uma operação lógica.

Aqui, já podemos observar três importantes caracterizações da concepção aritmética do *Tractatus*: 1) O sucessor de um número é a reiteração de uma operação lógica sobre um conjunto pré-definido de proposições. 2) A soma está implícita no conceito de reiteração e sucessão. 3) O zero e o um, de acordo com esta definição, são resposta e alternativa à concepção dos números primitivos e dos sucessores na filosofia da matemática de Frege e de Russell[21].

Assim, provamos o critério (1) com a seguinte demonstração:

Para {a, b, c $\in \mathbb{N}$} se a = b, então a + c = b + c;

Para Ω^{S}'x = Ω^{0+1}'x e "Ω^{S0}'x" significa o mesmo que "Ω'x",

Por indução, temos: se Ω^{S0}'x = Ω'x$\rightarrow\Omega^{S0+1}$'x = Ω^{1+1}'x

Se Ω^{0}'x" significa o mesmo que "x"

E "Ω^{SS0}'x" significa o mesmo que "Ω'Ω'x",

Substituindo *s* em Ω^{S}'x por +1 temos:

Ω^{SS0}'x = Ω^{0+1+1} = Ω'Ω'x

$\Omega^{\nu+\mu}$'x= $\Omega^{\tau+\mu}$'x

Por indução: Ω^{S0+S}'x= Ω^{1+1}'x

A possível definição de subtração

O mesmo deve valer para a operação inversa. Com "$\Omega^{\nu-\mu}$'" e $\nu \geq \mu$, então é possível afirmarmos que a operação "$\Omega^{\mu'}$" reduz "μ" vezes o complexo proposicional formado por "$\Omega^{\nu'}$". Baseamos esta afirmação na inversão da definição presente na proposição 5.251 "Uma função não pode ser seu próprio argumento, mas o resultado de uma operação pode muito bem vir a ser base dela própria.". Considerando o critério de tradução (sinonímia) eu posso aplicar a operação inversa à operação que aplicamos para formar "$\Omega^{\nu'}$", envolve a aplicação inversa da operação "Ω'", "μ" vezes. Assim obtendo uma inversa[22] da soma, ou melhor, uma

21 Para Frege o 0 (zero) é definido como o conjunto de partida "{ }" (vazio) e o número 1 é definido como o conjunto dos conjuntos equipotentes ao conjunto "{ { } }" ou "{ 0 }". Já para Russell, o 0 (zero) define-se, também, por conjunto vazio "{ }" e o numero 1 é o conjunto dos conjuntos equipotentes ao conjunto que contém um objeto e o próprio conjunto vazio. (cf. PINTO, P.R.M. *Iniciação ao Silêncio: Análise do Tractatus de Wittgenstein,* 1998, p.102-103; 106 e nota 15; cf. RUSSELL, B.; WHITEHEAD, A. N. *Principia Mathematica,*1910, p.364-367) (A respeito de outra notação fregeana de número cf. FREGE, G. *The Foundations of Arithmetic*, 1884, §55).

22 A inversão, neste sentido, coaduna com as definições de *eliminação das operações lógicas*.

subtração baseada em operações lógicas.E provamos o critério (2) do seguinte modo:

Para {a, b, c $\in \mathbb{N}$} se a = b, então a − c = b − c;
Para Ω^{SS0}'x = Ω^{0+1+1}'x e "Ω^{SS0}'x" significa o mesmo que "Ω'Ω'x",
Por indução, temos: se Ω^{SS0}'x = Ω'Ω'x→Ω^{SS0-1}'x = Ω'x
Se Ω^{0}'x" significa o mesmo que "x"
E "$\Omega^{S0'}$x" significa o mesmo que "Ω'x",
Substituindo *s* em Ω^{S}'x por -1 temos:
Ω^{S0}'x = $\Omega^{0+1+1-1}$'x = Ω'x
$\Omega^{\nu-\mu}$'x= $\Omega^{\tau-\mu}$'x
Por indução: Ω^{SS0-S}'x= $\Omega^{(1+1)-1}$'x

A definição de produto

Em razão da pouca expressão de Wittgenstein sobre estas operações (em especial a ausência das definições de subtração e divisão), utilizaremos como pedra angular deste item, e talvez, como prova mais evidente das operações matemáticas, a proposição 6.241:

> Formula-se assim a demonstração da proposição 2 x 2 = 4:
>
> $$(\Omega^{\nu})^{\mu\prime}x = \Omega^{\nu \times \mu\prime}x \text{ Def.}$$
>
> $$\Omega^{2\times 2\prime}x = (\Omega^{2})^{2\prime}x = (\Omega^{2})^{1+1\prime}x = \Omega^{2\prime}\Omega^{2\prime}x = \Omega^{1+1\prime}\Omega^{1+1\prime}x$$
> $$= (\Omega'\Omega)'(\Omega'\Omega)'x = \Omega'\Omega'\Omega'\Omega'x = \Omega^{1+1+1+1\prime}x = \Omega^{4\prime}x$$

Ora, de imediato vemos que Wittgenstein reduz o produto à soma. Mas, há outras observações que devemos levar em conta antes de provar o critério (3). A primeira delas é que o par de parênteses indica que expoente "μ" se aplica à "Ω". A segunda é que o filósofo introduz a expressão "Ω^{2}" diretamente e, no centro das etapas de demonstração, converte em uma manipulação de parênteses que expressam núcleos de reiteração de operações marcados pela igualdade: "$(\Omega'\Omega)'(\Omega'\Omega)'x$". Mas o que Wittgenstein quer dizer com "$(\Omega'\Omega)'$" ?Sabemos que "Ω" significa a aplicação de uma determinada operação lógica e que a " ' " (aspa invertida) significa a forma de um resultado da aplicação de uma operação à uma dada base. Então, "$(\Omega'\Omega)'$" deve significar "a forma da operação resultante da composição de uma dada operação consigo mesma"[23]. Mas há outra observação oculta nesta expressão que explica a natureza da multiplicação e destes parênteses.

23 FRASCOLA, P. *Wittgenstein's Philosophy of Mathematics,*1994, p.15 [tradução livre do autor].

A resposta está na escolha de Wittgenstein em seguir o caminho: $\Omega^{2\,x\,2}{}'x = (\Omega'\Omega)'(\Omega'\Omega)'x = \Omega'\Omega'\Omega'\Omega'x = x = \Omega^{4}{}'x$. E a única resposta possível é que o núcleo "$(\Omega'\Omega)'$" significa "a forma do resultado da *dupla* aplicação sucessiva da segunda iteração de uma operação". Logo, $\Omega^{2\,x\,\mu}{}'$ é o mesmo que $(\Omega'\Omega)'^{\mu}x$, onde "μ" cria arranjos de Ω. Assim, se $\Omega^{1}{}'x = \Omega'x$ e $\Omega^{2}{}'x = (\Omega'\Omega)'x$, então $\Omega^{3}{}'x = (\Omega'(\Omega'\Omega))'x$.Deste modo, podemos provar uma multiplicação do tipo "3x2" e a propriedade de distributividade. Para3 x 2 = 6:

$$\Omega^{3\,x\,2}{}'x = (\Omega^{3})^{2}{}'x = (\Omega^{3})^{1+1}{}'x = \Omega^{3}{}'\Omega^{3}{}'x = \Omega^{1+1+1}{}'\Omega^{1+1+1}{}'x$$
$$= (\Omega'(\Omega'\Omega))'(\Omega'(\Omega'\Omega))'x = \Omega'\Omega'\Omega'\Omega'\Omega'\Omega'x = \Omega^{1+1+1+1+1+1}{}'x = \Omega^{6}{}'x$$

Não fica muito difícil perceber que este próprio exemplo oferece a primeira parte de nossa demonstração do critério (3). Assim, vamos demonstrar como seria 2x3, uma demonstração ainda mais fácil, para chegarmos à conclusão deste critério:2 x 3 = 6

$$\Omega^{2\,x\,3}{}'x = (\Omega^{2})^{3}{}'x = (\Omega^{2})^{1+1+1}{}'x = \Omega^{2}{}'\Omega^{2}{}'\Omega^{2}{}'x = \Omega^{1+1}{}'\Omega^{1+1}{}'\Omega^{1+1}{}'x$$
$$= (\Omega'\Omega)'(\Omega'\Omega)'(\Omega'\Omega)'x = \Omega'\Omega'\Omega'\Omega'\Omega'\Omega'x = \Omega^{1+1+1+1+1+1}{}'x = \Omega^{6}{}'x$$

Para completarmos com a propriedade da comutatividade:

Para $\Omega^{2x3}{}'x = (\Omega^{2})^{3}{}'x = \Omega^{6}{}'x$, onde $\Omega^{6}{}'x$ = "$\Omega^{SSSSSS0}{}'x$" significa o mesmo que "Ω'Ω'Ω'Ω'Ω'Ω'Ω'Ω'x",

Para $\Omega^{3x2}{}'x = (\Omega^{3})^{2}{}'x = \Omega^{6}{}'x$, onde $\Omega^{6}{}'x$ = "$\Omega^{SSSSSS0}{}'x$" significa o mesmo que "Ω'Ω'Ω'Ω'Ω'Ω'Ω'Ω'x",

Por indução, temos: se $[\Omega^{2x3}{}'x = (\Omega^{2})^{3}{}'x = \Omega^{6}{}'x] \rightarrow [\Omega^{3x2}{}'x = (\Omega^{3})^{2}{}'x = \Omega^{6}{}'x]$ Se $\Omega^{0}{}'x$" significa o mesmo que "x"

Então, $((\Omega^{2})^{3}{}'x = \Omega^{6}{}'x \leftrightarrow (\Omega^{3})^{2}{}'x = \Omega^{6}{}'x\ ) \Leftrightarrow$ Ω'Ω'Ω'Ω'Ω'Ω'Ω'Ω'x",

Cumprindo a exigência do critério (3): para {a, b, c $\in \mathbb{N}$} se a = b, então ac = bc;

$\Omega^{v.\mu}{}'x = \Omega^{\tau.\mu}{}'x$

Por indução: $\Omega^{SS0xSSS}{}'x = \Omega^{2x3}{}'x$

A possível definição de divisão

A operação de divisão não é citada no *Tractatus*, tampouco encontramos referências em outras fontes sobre a obra. Vamos partir da simples idéia de que, assim como a soma é invertida para formar a subtração, a multiplicação pode ser invertida para formar a divisão. A questão que abriga esta possibilidade está na forma como ele constrói as sucessões de operações através dos parênteses.

A definição de $(\Omega^2)^{3'}x$ por exemplo, mostra que ocorre um arranjo de $(\Omega'\Omega)'x$ 3 vezes de modo a formar $(\Omega'\Omega)'(\Omega'\Omega)'(\Omega'\Omega)'x$. E esta estrutura sempre pode ser reduzida a uma linha de ômegas de modo a formar uma estrutura simples (sem parênteses) de sucessões de uma operação: $\Omega'\Omega'\Omega'\Omega'\Omega'\Omega'x$.

A inversão da operação faz exatamente o que Wittgenstein pretende com a introdução dos parênteses. Estabelecer subdivisões do espaço lógico. De modo que:

$$\Omega^{6/2'}x = \frac{\Omega'\Omega'\Omega'\Omega'\Omega'\Omega'}{(\Omega'\Omega)'}x = \frac{(\Omega'\Omega)'(\Omega'\Omega)'(\Omega'\Omega)'}{(\Omega'\Omega)'}x = \frac{\Omega^{2'}\Omega^{2'}\Omega^{2'}}{\Omega^{2'}}x = \frac{(\Omega^2)^{3'}}{\Omega^{2'}}x = \frac{(\Omega^3)^{2'}}{\Omega^{2'}}x = \frac{(\Omega^3)^{2'}}{\Omega^{2'}}x = \Omega^{3'}x$$

Pode parecer estranho que $\frac{(\Omega^2)^{3'}}{\Omega^{2'}}x$ passe a ser $\frac{(\Omega^3)^{2'}}{\Omega^{2'}}x$, mas,como vimos no item anterior, a multiplicação permite este tipo de comutatividade.

Tendo cumprido os quatro critérios que provam a igualdade matemática, podemos dizer o motivo que leva Wittgenstein, a partir de sua filosofia da matemática, a afirmar com veemência a irrelevância da igualdade "a = b". A igualdade é uma equivalência de traços lógicos, logo "a = b" é uma igualdade que se resolve *a priori*[24], que demonstra a irrelevância fática da comparação do espaço lógico designado ao objeto *a* e sua estrutura como *a* e da comparação do espaço lógico designado ao objeto *b* e à sua estrutura como *b*. Esta conclusão está assentada na exigência da tradução entre operações lógicas. Para a matemática a igualdade significa a tradução de uma notação (equação) por outra, da mesma forma que nós podemos desfazer e refazer operações sobre operações, de modo que a quantidade de iterações de operações consecutivas de uma, equivalha às iterações consecutivas de outra operação[25],apresentando-nos a visão da matemática como uma manipulação de operações essencialmente vazias. Mais ou menos como construir edifícios virtuais utilizando como pontos de referência objetos existentes. Esta visão é claramente uma contraposição à concepção de Frege de sentido (*Sinn*) como modo de apresentação do objeto e significado (*Bedeutung*) como referência à um objeto mesmo ou valor de verdade.A afirmação fregeanade que "a = b" acrescenta alguma informação por declarar que o modo de apresentação de *a* é diferente do modo de apresentação de *b*, mas que ambos dizem respeito, essencialmente, ao mesmo objeto. Na definição matemática de Wittgenstein isto não passa de uma tautologia.

Estando em posse das questões elucidadas sobre a matemática e o fundamento de suas operações, vamos avaliar os resultados para nosso objetivo.

24 "Em termos aproximados: dizer de duas coisas que elas são idênticas é um contra-senso, e dizer de uma coisa que ela é idêntica a si mesma é não dizer rigorosamente nada." (WITTGENSTEIN, L. *Tractatus Logico-Philosophicus*, 1922, aforismo 5.5303)

25 Op.Cit., aforismo 5.251.

Semelhanças e diferenças entre equações e tautologias

As considerações que fizemos nestes últimos itens nos poderiam levar a pensar que a matemática se deduz diretamente das operações lógicas. Mas, este não é o caso. As apresentações que fizemos mostram que a matemática *usa o espaço lógico*, por isso ela é um método da lógica[26]. Esta diferença ficará evidente quando apresentarmos os pontos em comum e as diferenças entre as proposições da lógica (as tautologias e as contradições) e as proposições da matemática (as equações). Vejamos os pontos em comum[27]:

- Tanto as proposições da lógica, quanto as proposições da matemática não exprimem pensamentos, assim, não tem função projetiva e, portanto, não significam nada (*sinnlos*)[28].

- No que tange à demonstração das possibilidades lógicas, tanto as proposições da lógica, quanto as da matemática são igualmente eficientes. Isto é: quanto às possibilidades lógicas, elas são coextensivas. Elas demonstram tanto as possibilidades "caso a caso" da armação lógica (vide tradução entre estruturas lógicas e indução do sucessor de um número), quanto nos permite estabelecer generalizações[29].

- Construímos os números com base no mesmo fundamento lógico que construímos as proposições: o espaço lógico de possibilidades.

Estas características encerram a relação de proximidade da matemática com as proposições da lógica. Embora tenham semelhanças, as diferenças são profundas a tal ponto que sugerem uma visão *sui generis* do papel da matemática no programa logicista de Wittgenstein. Vejamos as diferenças:

A matemática é uma derivação das operações lógicas, não um reflexo ou abreviação delas. Tampouco uma configuração sintática especial como são as proposições da lógica. Isto se dá porque toda operação lógica tem como objeto uma ou mais proposições, assim também a tautologia. As equações matemáticas pressupõem as proposições elementares, mas tem o número como objeto. E, como vimos, os números são sucessões de operações em geral.

Como vimos no tópico anterior, a igualdade "=" e a identidade são coisas distintas. A igualdade serve à matemática na medida em que permite equiparar

---

26 Op. Cit., aforismo 6.234.

27 Nossos pontos em comum inspiram-se em boa parte nas conclusões

28 "A proposição da matemática não exprime pensamento." (Op. Cit., aforismo 6.21).

29 Notemos que a questão das generalizações que se põem aqui não diz respeito às generalizações dos quantificadores. A este respeito, Wittgenstein critica Russell por estabelecer em seu "Axiom of Reducibility" uma aparência lógica para algo meramente contingente. Determinar uma quantificação não dá o caráter de validade *a priori* como possuem as tautologias e as equações matemáticas. (cf. Ibid., aforismos 6.1232-6.1233).

notações diversas de uma mesma estrutura. Já a identidade é uma característica *a priori* onde "a identidade do objeto designado pelo símbolo 'a' é expressa pelo uso deste símbolo 'a' todas as vezes que o objeto for mencionado; a diferença entre os objetos designados pelos símbolos diferentes 'a' e 'b' é expressa pelo uso respectivo dos mesmos símbolos diferentes todas as vezes que cada um deles for mencionado."[30]. Esta diferença se mostra na ausência do sinal "=" nas notações da lógica. Ao passo que na matemática este sinal constitui a condição fundamental para a demonstração.

Ainda que as proposições da lógica e as proposições da matemática possam servir a si mesmas como demonstrações, os métodos de dedução diferem consideravelmente. As proposições da lógica utilizam como regra de dedução o *modus ponens*, as proposições da matemática utilizam a igualdade "=" como expressão de substituição de uma notação por outra.

A função da proposição da lógica é tornar evidente (*mostrar*) a estrutura lógica (sintática) de uma dada proposição[31]. A função de mostrar é tão mais importante, que sua caracterização enquanto tautologia ou contradição que podemos criar notações que evidenciem a estrutura lógica das proposições, mutatis mutandis. Por exemplo, as tabelas de verdade. No caso da proposição matemática, Wittgenstein deixa claro na proposição 6.211 que a função da matemática é operar a partir de proposições não-matemáticas de modo a produzir outras proposições não-matemáticas. Por exemplo, as operações aritméticas de nosso cotidiano.

Deste modo, podemos dizer que *a aplicação da lógica* e *a matemática* são diferentes e independentes, ainda que todas estejam subordinadas à lógica estruturante, isto é, como condição de possibilidade. Esta afirmação separa completamente Wittgenstein de Frege e Russell, na medida em que o primeiro rompe com o programa logicista universalista dos outros dois.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BLACK, Max. A Companion to Wittgenstein's Tractatus. Cambridge: Cambridge University Press, 1964.

FRASCOLA, Pasquale. *Wittgenstein's Philosophy of Mathematics* [1994]. New York: Routledge, 2006.

FREGE, Gottlob. *The Foundations of Arithmetic* [1884], Trad ingl: J.L. Austin. New York: Harper & Brothers, 1960.

30 PINTO, P.R.M. *Iniciação ao Silêncio: Análise do Tractatus de Wittgenstein,* 1998, p.228-229.

31 WITTGENSTEIN, L. *Tractatus Logico-Philosophicus*, 1922, aforismo 6.121

FREGE, Gottlob. *O Pensamento* [1988]. Trad port: Marco Ruffino. Rio de Janeiro: Tempo Brasileiro/Edufrn, 1999.

FREGE, Gottlob. *Sobre o Conceito e o Objeto* e *Sobre; Sobre o Sentido e a Referência*, [1892]. Tradução brasileira: Paulo Alcoforado. São Paulo: Edusp, 2009.

GLOCK. Hans J, *Dicionário Wittgenstein* [1996]. Trad. port: Helena Martins. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 1998.

HACKER, P.M.S. *Insight and Illusion: Themes in the Philosophy of Wittgenstein*, [1989]. Bristol: Oxford Press, 1997.

PETERSON, Donald. *Wittgenstein Early Philosophy: Three Sides of the Mirror*, Toronto and Buffalo: University of Toronto Press, 1990.

PINTO, Paulo Roberto Margutti. *Iniciação ao Silêncio: Análise do Tractatus de Wittgenstein*. São Paulo: Loyola, 1998.

RICKETTS, Thomas. *The Cambridge Companion to Wittgenstein* [1996]. New York: Press Syndicate of the University of Cambridge.

RUSSELL, B.; WHITEHEAD, A. N. *Principia Mathematica*, Londres: Cambridge University Press, 1910.