Porrinha: quando as probabilidades estão além de dados e moedas

Paulo Guilherme Pinheiro dos Santos[1], **Sâmia Bacelar Pinto**[2] **e Mônica dos Santos Silva**[3]

1 Universidade Federal do Amapá, Brasil. E-mail: pgpinheiro@unifap.br
2 Universidade Federal do Pará, Brasil. E-mail: smiabacelar@yahoo.com.br
3 Universidade Federal do Pará, Brasil. E-mail: monik.santsilv@gmail.com

RESUMO: A utilização de jogos que fazem parte do cotidiano dos alunos é muito importante para o interesse e aprendizado de qualquer disciplina. O jogo denominado porrinha foi utilizado com o objetivo de modelar um caso de cálculo das probabilidades. Este trabalho é classificado como ensaio teórico e é mostrado o desenvolvimento da esperança matemática da variável considerada neste jogo, a soma. Alguns resultados para dois, três e quatros jogadores são desenvolvidos. O jogo da porrinha é adequado para criar uma sequência didática para o ensino de probabilidade.
Palavras-chave: Jogos; Probabilidade; Esperança; Ensino-aprendizagem.

Porrinha: when the probabilities are beyond dice and coins

ABSTRACT: The use of games which are a part of students' daily lives is important to the interest in and learning of any subject. The game named Porrinha, very well-known in Brazilian universities, was used to elucidate a case of calculus of probabilities. This paper is classified as a theoretical issue and shows the development of the mathematical expectation of the variable considered in the game, the sum. Some results for two, three and four players are described. Porrinha is a suitable game when it comes to developing a learning sequence in probability teaching.
Keywords: Games; Probability; Expectation; Teaching and Learning.

1 INTRODUÇÃO*

Os jogos funcionam como instrumentos lúdicos no processo de ensino-aprendizagem de diversos assuntos (OLIVEIRA, 2008; NASCIMENTO et al., 2012) e, segundo Queiroz e Coutinho (2007) estão presentes no imaginário místico e psicológico da humanidade desde tempos antigos, tais como os jogos de astrágalos, osso do pé usado com um dado.

O estudo formal da disciplina de probabilidades se deu inicialmente a partir da análise dos jogos (RAUPP, 2001), para alguns, pela percepção do conceito de acaso, os chamados "jogos de azar". O estudo científico de jogos de dados são referenciados desde os séculos XV e XVI na Itália, e mais sistematicamente a partir das famosas correspondências de cartas entre Fermat

* Este trabalho foi inspirado depois de muitas jogadas com os graduandos em Estatística na viagem de retorno a Belém após o Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística - SINAPE 2012 em João Pessoa e na conversa com o Dr. João Marcelo Brazão Protázio (Professor do Curso de Estatística da Universidade Federal do Pará, entusiasta, usuário e divulgador do *software* livre R).

e Pascal no século XVII na França (LOPES et al., 2013). Para maiores detalhes sobre a história da teoria das probabilidades, os trabalhos de Morgado (1991), Queiroz e Coutinho (2007) e Mlodinow (2009) formam uma excelente introdução.

Mesmo as disciplinas de probabilidades e estatística terem ganhado mais espaço entre os conteúdos didáticos da educação básica (MENEGHETTI et al., 2011), os livros didáticos de cálculos das probabilidades geralmente apresentam exemplos didáticos envolvendo jogos antigos (dados, moedas, urnas, baralhos, roletas, ...) e que não fazem parte do cotidiano dos estudantes, podendo ser um fator que influa na dificuldade de assimilação, assim como o interesse pelos tópicos abordados em um curso de ensino superior, usualmente lecionados em um ou dois semestres.

A beleza balizadora do estudo das probabilidades é que a noção de acaso não é intuitiva (MLODINOW, 2009) e, não poucas vezes, as soluções de um problema de probabilidade são bem diferentes do que aparentam e, conforme Morgado et al. (1991) ressalta, as vezes conduzem a resultados inesperados ou à primeira vista paradoxais. Isso indica que a disciplina deveria ser tratada com maiores cuidados desde os contatos iniciais na infância (LOPES, 2012), na educação básica (WALICHINSKI; SANTOS JUNIOR, 2013) e no ensino fundamental (QUEIROZ; COUTINHO, 2007).

No Brasil, as loterias oficiais ou não movimentam enormes montantes monetários e esse fato pode estar relacionado com a carência em educação estatística da população, mais precisamente dessa ausência desde as séries iniciais de ensino (MUNIZ, 2013). Esse déficit de habilidades provavelmente contribui para que muitos cursos superiores detenham elevados índices de reprovações nas disciplinas de probabilidades.

O objetivo deste trabalho é construir um modelo no escopo da teoria das probabilidades com uma brincadeira típica do Brasil, principalmente nos botecos, a porrinha, a qual faz parte do cotidiano dos estudantes brasileiros e, assim, estimular o interesse pelo aprendizado da disciplina.

2 MÉTODOS

Este artigo é classificado como um ensaio teórico, já que “se propõe atacar um objeto abstrato” (ECO, 2009) a partir de elementos historicamente consolidados e definidos na disciplina de teoria das probabilidades (tais como esperança matemática, espaço amostral, aleatoriedade) modelará um caso do jogo de porrinha, ou seja, estabelecerá um padrão para que os jogadores se aproximem da vitória, outrossim, servir de base para formulação de futura sequência didática para o ensino de probabilidades. Assim, os próximos tópicos desta seção apresentarão as regras e as condições necessárias para a definição do modelo.

AS REGRAS

A porrinha é um jogo em que se usam pedaços de papel, moedas ou palitos quebrados (algo pequeno que possa ficar facilmente escondido dentro da mão). Os jogadores devem possuir três objetos, geralmente são usados palitos de fósforos ou pequenas pedras. Cada jogador pode escolher: nenhum, um, dois, ou três objetos. Essa escolha fica guardada na mão de cada participante e, sem revelá-la, as mãos de todos são apresentadas ao grupo. Cada rodada consiste em contar a quantidade total de objetos apresentados por cada jogador. Vence o jogo, quem adivinha qual é a quantidade total de objetos escolhidos por todos os participantes (TV-ESCOLA, 2014). Na primeira rodada é vedado resultado zero (ou “lona” como é comumente chamado pelos jogadores).

MODELAGEM

No escopo da teoria das probabilidades, entende-se como uma variável aleatória, usualmente abreviada como *v. a.*, a “funções reais definidas no espaço amostral” (ROSS, 2010) e variável aleatória discreta como “uma variável aleatória que pode assumir no máximo um número contável de valores possíveis” (ROSS, 2010). Outra definição clássica e que em seguida será desenvolvida no modelo é a de esperança (também denominada de valor esperado, ou expectância, ou ainda, ou esperança matemática, ou média) de uma variável aleatória que consiste numa “média ponderada dos possíveis valores que a variável aleatória pode receber, com cada valor sendo ponderado pela probabilidade de que a v. a. seja igual a esse valor” (ROSS, 2010). A seguir será construído a modelagem probabilística envolvendo o jogo de porrinha.

Seja $\boldsymbol{n}$o número total de jogadores, onde $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{1}, \ldots, \boldsymbol{i}$. Seja $\boldsymbol{J_i}$ o vetor contendo os possíveis resultados $\boldsymbol{j_k}$ do jogador $\boldsymbol{i}$, com $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{1}, \ldots, \boldsymbol{l}$. Por exemplo, caso esteja em análise o “jogador 1” $(\boldsymbol{J_1})$, o vetor de possibilidades deste será: $\boldsymbol{J_1} = (\boldsymbol{j_1} = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{j_2} = \boldsymbol{1},\ \boldsymbol{j_3} = \boldsymbol{2},\ \boldsymbol{J_4} = \boldsymbol{3})$, neste caso, os valores de $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \boldsymbol{3}, \boldsymbol{4}$.

Como os jogadores $\boldsymbol{J_i}$ escolhem seus valores independentemente um do outro, assume-se neste ponto que a única estratégia para a escolha do número de objetos por jogador será regida pela acaso, portanto cada possível resultado apresentado por jogador, os $\boldsymbol{j_k}$, terão igual probabilidade de ocorrência, ou seja, $\boldsymbol{0}, \boldsymbol{25}$.

Seja $\boldsymbol{S}$ a soma dos resultados apresentado pelos jogadores em cada rodada, isto é, $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{J_1} + \cdots + \boldsymbol{J_i}$. Logo, $\boldsymbol{S}$ será uma variável aleatória discreta e sua esperança, *E(S)*, será:

$$\boldsymbol{E(S) = E(J_1 + \cdots + J_i),} \tag{1}$$

ou analogamente,

$$\boldsymbol{E(S) = E(J_1) + \cdots + E(J_i)} \tag{2}$$

Como cada jogador só pode escolher os resultados 0, 1, 2 e 3, e admitindo que essa escolha é aleatória, ou seja,

$$\boldsymbol{P(J_i = j_k) = p(j_k) = \frac{1}{4} = 0,25.} \tag{3}$$

Essa premissa, a escolha aleatória, influi imediatamente na esperança de cada um dos jogadores, pois, como a esperança matemática (ROSS, 2010) de uma variável aleatória discreta *X* é definida como,

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \; p(x_i) \quad \textbf{(4)}$$

Consequentemente, para o caso construído para o jogo de porrinha, a esperança para cada jogador é definida de acordo com a Equação 5, a seguir,

$$E(J_i) = \sum_{k}^{l} j_k \; p(j_k) \quad \textbf{(5)}$$

Como cada jogador possui o mesmo vetor de possibilidades e o mesmo vetor de probabilidades associado, então, o desenvolvimento da esperança do *i*-ésimo jogador será:

$$E(J_i) = \sum_{k}^{4} j_k \, p_{(j_k)} = j_1 p(j_1) + j_2 p(j_2) + j_3 p(j_3) + j_4 p(j_4), \quad \textbf{(6)}$$

substituindo-se os valores de cada um dos termos, tem-se,

$$E(J_i) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{4} = 1{,}5 \quad \textbf{(7)}$$

Nesta etapa, não deve ser difícil concluir que a $E(J_1) = \cdots = E(J_i)$. Para a esperança do somatório, o último passo deve ser observado, retornando a Equação 1 e concluindo que:

$$E(S) = n\,E(J_i) \quad \textbf{(8)}$$

Portanto, o caso geral para se encontrar a esperança do somatório em cada rodada se resume a calcular:

$$E(S) = 1{,}5 \times n, \quad \textbf{(9)}$$

ou seja, nestas condições, basta o jogador saber o número de jogadores envolvidos (bastando para isso contar quantos jogadores são) e multiplicar esse número ao valor de 1,5 assim obtendo o valor médio esperado da jogada! Isto é, em média, dado jogador poderá esperar ou se aproximar da vitória aplicando a Equação 9 a cada rodada.

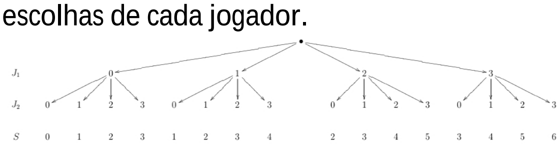
ANÁLISE COMPUTACIONAL

Todas as análises computacionais (estatísticas e gráficas) foram geradas no aplicativo livre, *open source* e multiplataforma R (CORE TEAM, 2014) para efeito de ilustração de alguns resultados quando existem dois, três e quatro jogadores.

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

O caso mais simples do jogo ocorre quando existem dois jogadores (J_1 e J_2), portanto, a final de uma rodada de porrinha. Na Figura 1 é possível observar todas as possibilidades de escolhas de resultados dos jogadores J_1 e J_2 combinadas, ou seja, o espaço amostral (conjunto formado por todos os resultados possíveis relacionados a um fenômeno), além da variável *S* resultante dessas escolhas. Para três jogadores, cada possibilidade do jogador J_2 se ramificaria para mais quatro possibilidades (0, 1, 2 e 3) e assim, sucessivamente, quantos mais jogadores estivessem participando. Visualizar claramente o espaço amostral constitui-se a primeira dificuldade para a solução das maiorias dos problemas probabilísticos em todos os níveis de ensino, daí constituindo-se de fundamental importância o ensino de processos estocásticos desde a infância (LOPES, 2012), bem como através de exercícios lúdicos de análise combinatória (SOUZA; LOPES, 2012).

Figura 1: Árvore de possibilidades para o caso de dois jogadores (J_1 e J_2) e os devidos resultados da variável *S*, soma das combinações de escolhas de cada jogador.



A Tabela I traz os possíveis resultados do somatório (*S*) nesse caso. Com ela, é fácil observar que o resultado com maior frequência é o somatório igual a três (aparecendo quatro vezes). A Tabela II mostra a distribuição de probabilidades da variável *S* para esse caso.

Tabela I: Combinações dos possíveis resultados para dois jogadores (J_1 e J_2).

J_i / J_j	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	4
2	2	3	4	5
3	3	4	5	6

Nota: Cada célula da tabela são mostrados os possíveis valores da variável S quando há dois jogadores.

Tabela II: Distribuição de probabilidades, *P(S=s)*, da variável *S* para dois jogadores (J_1 e J_2).

S	0	1	2	3	4	5	6
P(S = s)	0,0625	0,1250	0,1875	0,2500	0,1875	0,1250	0,0625

As Tabelas II, III e IV mostram as distribuições de probabilidades da variável *S* para, respectivamente, dois, três e quatro jogadores envolvidos em uma rodada do jogo.

Tabela III: Distribuição de probabilidades, *P(S=s)*, da variável *S* quando participam três jogadores (J_1, J_2 e J_3).

S	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P(S = s)	0,0156	0,0469	0,0938	0,1562	0,1875	0,1875	0,1562	0,0938	0,0469	0,0156

Tabela IV: Distribuição de probabilidades, *P(S=s)*, da variável *S* para quatro jogadores (J_1, J_2, J_3 e J_4).

S	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(S = s)	0,0039	0,0156	0,0391	0,0781	0,1211	0,1562	0,1719	0,1562	0,1211	0,0781	0,0391	0,0156	0,0039

A expansão do comportamento da variável *S* para os casos com três jogadores em diante é facilmente deduzida, pois a esperança da v. a. *S* sempre assume o valor central entre zero e máximo do somatório entre o número de jogadores envolvidos, isto é, o máximo sempre será um múltiplo de 3. Por exemplo, para três jogadores os limites da distribuição da variável *S* será no mínimo zero e no máximo nove, com valor esperado de *4,5*.

As Figuras 2, 3 e 4 mostram o comportamento simétrico da variável aleatória *S* e a quantidade de jogadores envolvidos. Na Figura 2 observa-se que o valor com maior probabilidade (ou maior frequência – Tabelas II e III) é três. A Figura 3 ilustra o comportamento da variável *S* para o caso de três jogadores. Nesta situação, o valor esperado não é inteiro pois dois resultados (4 e 5) são os mais frequentes, logo a esperança de será *4,5* e pode ser entendida como a média entre esses dois valores mais frequentes. Na Figura 4, quando estão envolvidos quatro jogadores, visualiza-se que a variável *S* atinge um máximo de *12* e com maior probabilidade para o valor seis.

Figura 2: Variável aleatória discreta *S* para o caso de dois jogadores.

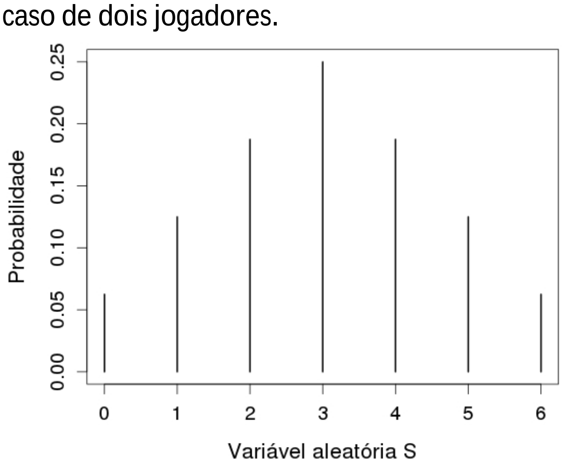


Figura 3: Variável aleatória discreta *S* para o caso de três jogadores.

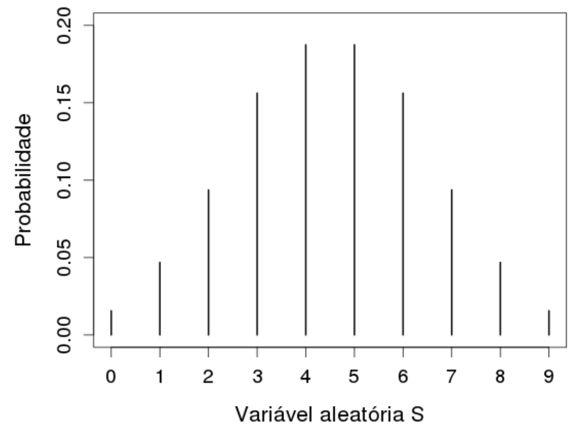
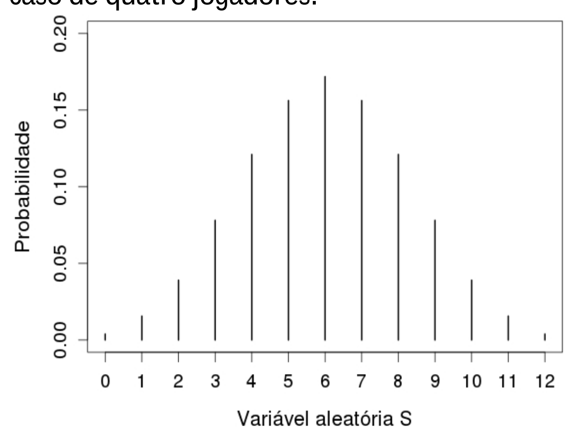


Figura 4: Variável aleatória discreta *S* para o caso de quatro jogadores.



Com efeito, o resultado obtido pela Equação 9 é bastante relevante, pois assumido que a única estratégia envolvida na escolha dos objetos seja a aleatoriedade, então o palpite mais provável estatisticamente seguirá esse norma. Como a literatura aponta a noção de acaso é bastante complexa e intrigante para humanidade (MLODINOW, 2009; QUEIROZ; COUTINHO, 2007) e, portanto, dadas as condições iniciais aqui apresentadas, pode ser explorada de maneira lúdica para facilitar o entendimento de tópicos da teoria das probabilidades.

Um dado preocupante é apresentado no trabalho de Meneghetti et al. (2011). Os autores contabilizaram somente 11 trabalhos que versavam sobre o tema: Ensino de Probabilidade e Estatística, no III Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (III SIPEM). Talvez essa inconspícua importância do tema demonstre a grande vazio que existe no processo ensino-aprendizado da teoria das probabilidades, em todos os níveis de ensino. Nesse sentido, existem propostas interessantes para corrigir essa lacuna com propostas simples, tais como o uso de fractais para o ensino do conceito de probabilidade geométrica (LOPES et al., 2013); as "propostas ou relatos de atividades didático-pedagógica de ensino de conteúdos de Estatística" encontrados na análise feita por Meneghetti et al. (2011); nas sequências didáticas identificadas nas dissertações analisadas por Oliveira (2007). Outrossim, a Probabilidade e Estatística no Brasil apresentam uma perspectiva de crescimento e consolidação (WALICHINSKI; SANTOS JUNIOR, 2013).

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A aplicação dos conceitos iniciais da teoria das probabilidades em situações mais próximas do universo dos alunos pode facilitar a assimilação do conteúdo didático, bem como estimulá-los na busca de novos conhecimentos, como analisado por (OLIVEIRA, 2008), a relação ensino-aprendizado seja positiva é necessário um melhor aproveitamento do conteúdo abordado, devendo sempre os professores procurar diversificar as aulas para que estas se tornem mais atrativas e proporcionando um melhor desempenho na facilitação da aprendizagem. Neste sentido, o caso do jogo de porrinha se enquadra perfeitamente com o desenvolvimento de conceitos iniciais da disciplina de cálculo das probabilidades, tais como: esperança, variância, vetores aleatórios, variável discreta, função de uma variável aleatória, variáveis uni e multidimensionais servido para a construção de sequências didáticas desta disciplina.

Possíveis próximas pesquisas envolveriam: (i) o acompanhamento de estudantes de graduação em várias rodadas do jogo para comparação destes resultados com o modelo aqui proposto, Equação 9. Como esse modelo assumiu a hipótese de escolha aleatória e independente, supõe-se que devido as diferentes estratégias que cada participante poderá desenvolver para vencer o jogo, os resultados tenham algum viés dependente dos jogadores, o que resultaria na modelagem da esperança condicional. Assim, outro desdobramento da modelagem do jogo da porrinha se aplicaria à teoria dos jogos; (ii) demonstração do desenvolvimento da formalização matemática da variância para quantificar a variabilidade da variável S; e, (iii) aplicação de métodos de Monte Carlo para comparação com as modelagens propostas e expansão de combinações de diferentes estratégias envolvidas no jogo.

REFERÊNCIAS

ECO, H. **Como se faz uma tese**. São Paulo: Perspectiva, 2009.

LOPES, C. E. A educação estocástica na infância. **Revista Eletrônica de Educação**, v. 6, n. 1, p. 160-174, mai, 2012.

LOPES, J. M.; SALVADOR, J. A.; BALIEIRO FILHO, I. F. O ensino de probabilidade geométrica por meio de fractais e da resolução de problemas. **Revista Eletrônica de Educação**, v. 7, n. 3, p. 47-62, 2013.

MENEGHETTI, R. C. G.; BATISTELA, R. F.; BICUDO, M. A. V. A Pesquisa sobre Ensino de Probabilidade e Estatística no Brasil: um exercício de metacompreensão. **Bolema**, v. 24, n. 40, p. 811-833, dez, 2011.

MLODINOW, L. **O andar do bêbado – como o acaso determina nossas vidas**. Brasil: Zahar, 2009.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, J. B. P. de; CARVALHO, P. C. P.; FERNANDEZ, P. **Análise combinatória e probabilidade**. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

MUNIZ, C. A. Apresentação. In: COUTINHO, C. Q. S. **Discussões sobre o ensino e a aprendizagem da probabilidade e da estatística na escola básica**. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2013. p. 07-09.

NASCIMENTO, R. M; NETO, N. T. A.; SAINT'CLAIR, E. M.; CALOMENI, M. R. Lúdico como ferramenta pedagógica no processo ensino aprendizagem. **Persp. online: biol. & saúde**, v. 5, n. 2, p. 23-30, 2012.

OLIVEIRA, P. G. de. **Ensino-Aprendizagem de Probabilidade e Estatística: Um Panorama das Dissertações do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP**. Monografia (Especialização) – Pós-Graduação Lato Sensu em Educação Matemática, Centro Universitário da Fundação Santo André, Santo André, 2007.

OLIVEIRA, L. D. G. C. Mediando o Ensino-aprendizagem: a Contribuição do Jogo “Evoluindo Saúde” no Processo Ensino Aprendizagem dos Alunos da Educação Básica. In: ANAIS DO VIII SIMPÓSIO DDE PRODUÇÃO CIENTÍFICA -UESPI, Piauí, 2008, p. 1-11.

QUEIROZ, C.; COUTINHO, S. Conceitos probabilísticos: quais contextos a história nos aponta? **Revista Eletrônica de Matemática**, v. 2.3, p. 50-67, 2007.

R CORE TEAM. R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2014.

RAUPP, R. M. **Cara ou coroa? Problemas Famosos e Intrigantes das Probabilidades**. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Curso de Bacharelado em Estatística, Faculdade de Estatística, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, UFPA, Belém, 2001.

ROSS, S. **Probabilidade – Um curso moderno com aplicações**. Porto Alegre: Bookman, 2010.

SOUZA, A. C. de; LOPES, C. E. Combinando roupas e vestindo bonecos: ideias de combinatória no desenvolvimento profissional de uma educadora da infância. **Revista Eletrônica de Educação**, v. 6, n. 1, p. 148-159, 2012.

TV-ESCOLA. **Matemática em toda parte 2 – Matemática nas brincadeiras**. Disponível em: <http://tvescola.mec.

gov.br/index.php?option=com_zoo&view=item&item_id=17435>. Acessado em: 10/05/2014.

WALICHINSKI, D.; SANTOS JUNIOR, G. dos. Educação estatística: objetivos, perspectivas e dificuldades. **Imagens da Educação**, v. 3, n. 3, p. 31-37, 2013.

Artigo recebido em 12 de janeiro de 2015.
Aceito em 18 de abril de 2015.